جبر



فهرست مندرجات

عنوان	صفحه

به نام خدا

فصل اول

مراجعه به برنامهٔ دورهٔ اول

۱ - عبارت جبری، مجموعه‌ای‌است‌ازاعداد وحروف که به‌وسیلهٔ علامات ششگانهٔ جمع ، تفریق ، ضرب ، قوه ، تقسیم و ریشه به هم مربوط شده باشند ؛ مانند :

$$\frac{a(۲a+b)^۲}{۵c} \text{ و } \sqrt{x}-۲x^۲ \text{ و } ۴a-\sqrt{۵} \text{ و } ax^۲-۳x+۲$$

۲ - عبارت جبری را **منطق** (گویا)گویند هرگاه در آن عبارت هیچ حرفی در زیر رادیکال واقع نباشد ؛ در غیر این صورت ، عبارت جبری را **اصمّ** (گنگ) می‌نامند .

مثال : عبارتهای جبری $ab^۲$ ، $۳a^۴b$ ، $۴a\sqrt{۵}$ ، $\frac{a^۳-b^۳}{۴c^۲}$ ، $x^۲-۴x+۶$ و $(x+۱)^۲$ گویا هستند .

عبارتهای $۲a\sqrt{b-۱}$ و $۳b\sqrt{۲x}$ عبارات‌جبری اصم می‌باشند .

عبارت جبری منطق را **صحیح** گویند هرگاه آن عبارت شامل حرفی درمخرج نباشد؛ درغیراین‌صورت‌عبارت جبری‌را **کسری** می‌نامند.

مثال : عبارتهای جبری $\frac{۲a+۳b}{۷}$ و $x^۲-۴x+۵$ **صحیح** و

عبارات جبری $\frac{a-5b}{2c}$ و $\frac{2x-y+1}{x-4}$ کسری هستند .

۳ - **جمله** یا **یک‌جمله‌ای** ، عبارتی است جبری که بین اجزای مختلف آن دو عمل جمع و تفریق وجود نداشته باشد . مانند : $5a$ و $-\frac{2}{3}x$ و $\frac{x}{2\sqrt{y}}$ و $\frac{4}{3}a^2b\sqrt{x}$.

از این تعریف که برای یک‌جمله‌ای کردیم چنین بر می‌آید که یک‌جمله‌ای از نظر کلی ممکن است صحیح یا منطق وکسری و یا اصم باشد ؛ اما دقیقاً باید متذکر بود که ضمن عملیات جبری و اثبات قضایا و بطورکلی در هر مورد که ذکری از جمله یا یک‌جمله‌ای به میان آید مقصود **یک‌جمله‌ای صحیح** ،یعنی یک‌عبارت‌جبری به‌صورت $Ax^my^nz^p$ است‌که در آن ، A نمایش یک **ضریب عددی** (مثبت یا منفی) و x و y و z حروف یک‌جمله‌ای و m و n و p نمایش اعداد صحیح مثبت یا صفرند .

مثلا اگر ضریب عددی یک جمله‌ای : $A=-\frac{5}{2}$ و $m=3$ و $n=2$ و $p=4$ باشد، یک‌جمله‌ای نامبرده به این صورت‌خواهد بود:

$$-\frac{5}{2}x^3y^2z^4$$

در یک‌جمله‌ای $Ax^my^nz^p$ قسمت $x^my^nz^p$ را **قسمت حرفی** یک‌جمله‌ای می‌نامند .

وقتی‌که $A=+1$ باشد یک‌جمله‌ای $Ax^my^nz^p$ را به صورت : $x^my^nz^p$ و اگر $A=-1$ باشد یک‌جمله‌ای مذکور را به صورت : $-x^my^nz^p$ می‌نویسند .

۴ - **ضریب یک‌جمله‌ای نسبت به یک حرف** ، عبارت است از حاصل عملیاتی‌که روی اعداد وسایر حروف‌آن جمله انجام شده باشد.
ضریب یک‌جمله‌ای ($-\frac{3}{4}a^2bx$) نسبت به‌حرف x عبارت است از: ($-\frac{3}{4}a^2b$).

همچنین‌ضریب جملهٔ $\frac{2}{3}a\times\frac{3}{4}bx$
- نسبت به‌حرف x می‌شود: $\frac{1}{2}ab$
- نسبت به حرف b می‌شود: $\frac{1}{2}ax$
- نسبت به‌حرف a می‌شود: $\frac{1}{2}bx$

۵ - **درجهٔ یک‌جمله‌ای صحیح نسبت به یک حرف** ، عبارت است ازنمای آن حرف ؛ مثلا یک‌جمله‌ای $4ab^2x^3$ نسبت به حرف a ازدرجهٔ‌اول ونسبت به‌حرف b ازدرجهٔ دوم ونسبت به‌حرف x ازدرجهٔ سوم است .

تبصره - هرگاه یک جمله‌ای فاقد حرف مفروضی باشد ، درجهٔ یک‌جمله‌ای نسبت به آن حرف صفر است ؛ مثلا درجهٔ یک‌جمله‌ای $4ab^2x^3$ نسبت به حرف c صفر است .

۶ - **درجهٔ یک‌جمله‌ای صحیح نسبت به چند حرف** ، عبارت است از مجموع نماینده‌های آن حروف ؛ مثلا یک‌جمله‌ای $4ab^2x^3$ نسبت به حروف a و b ازدرجهٔ سوم ونسبت به حروف a و x ازدرجهٔ چهارم ونسبت به حروف b و x ازدرجهٔ‌پنجم ونسبت به سه حرف a و b و x از درجهٔ ششم است .

۷ - **جمله‌های متشابه** - دوجمله‌را متشابه‌گویندهرگاه اختلاف آنها منحصراً در ضریبهایشان باشد ؛ مثلا دو جملهٔ $2ab$ و $-3ab$ متشابهند ؛ همچنین‌جمله‌هایی نظیر: $3x^2$ و $-x^2$ و $\frac{1}{3}x^2$ و $\sqrt{2}x^2$ نیز متشابهند .

۸ - **مجموع جبری چندین جملهٔ متشابه مفروض ، جمله‌ای** است متشابه‌باهریك‌ازآنها که‌ضریبش‌مجموع جبری‌ضریبهای جمل‌متشابه مفروض باشد. مثلا مجموع جبری جمله‌های متشابه :

$4a$ و $-a$ و $-8a$ و $3a$ و a

جملهٔ ($-a$) می‌شود .

۹ - **چندجمله‌ای** ، عبارت است از مجموع جبری چندین يك جمله‌ای؛ به‌عبارت دیگر، چندجمله‌ای عبارتی است جبری مرکب از چندین يك‌جمله‌ای که به وسیلهٔ علامتهای (+) و (−) به یکدیگر پیوسته باشند؛ مانند عبارت :

$$4a^2b-3ab^4-2b+5ab^2 \quad (1)$$

هریك ازجمله‌های موجود درچند جمله‌ای را توأم با علامتی‌که طرف چپ آن جمله قرار دارد يك جمله از چندجمله‌ای می‌نامند ؛ بنابراین جمله‌های چندجمله‌ای (۱) عبارتند از :

$+4a^2b$ و $-3ab^4$ و $-2b$ و $+5ab^2$

یا بطور خلاصه $5ab^2$ و $-2b$ و $-3ab^4$ و $4a^2b$

۱۰ - يك‌چندجمله‌ای‌شامل حرفی‌مانند x را نسبت به‌این‌حرف **صحیح** گویند هرگاه حرف x در مخرج نباشد و بعلاوه نماینده‌های x در جمله‌های مختلف چندجمله‌ای همگی **صحیح** و **مثبت** باشند .

مثلاچندجمله‌ای $7x^5-3x^2+4x+6$ نسبت‌به‌حرف x صحیح‌است.

۱۱ - چندجمله‌ای صحیح نسبت به حرفی مانند x را بر حسب این حرف وقتی **کامل** می‌گویند که جمیع قوای نزولی یا صعودی x را (ازبزرگترین قوهٔ موجود تاتوان صفر یا بعکس) داشته باشد؛(توان صفر x جمله‌ای مستقل از x خواهد بود) .

مثلا چهار جمله‌ای : $ax^3+cx+bx^2+d$ برحسب x کامل و سه‌جمله‌ای : ax^3+cx+d برحسب x ناقص است .

تبصره - چند جمله‌ای ناقص از حرفی مانند x را با افزودن جمله‌های‌مناسب‌که ضرایب آنها صفرباشد می‌توان به‌صورت چندجمله‌ای کامل درآورد؛ **مثلا** سه‌جمله‌ای ناقص ax^4+bx^2+c را می‌توان به صورت چندجمله‌ای‌کامل زیر نوشت :

$$ax^4+0\times x^3+bx^2+0\times x+c$$

۱۲ - **درجهٔ چندجمله‌ای صحیح** نسبت‌به‌يك حرف عبارت‌است از بزرگترین نمای آن حرف درآن چندجمله‌ای .

درجهٔ چندجمله‌ای نسبت به چند حرف ، عبارت است از درجهٔ جمله‌ای ازآن‌که نسبت به‌حروف موردنظربزرگترین درجه‌را داراست؛ **مثلا** چند جمله‌ای : $5a^3x^2-2a^4x^5+3a^2x^6$ نسبت به حرف a از درجهٔ چهارم و نسبت به‌حرف x از درجهٔ ششم ونسبت به‌حروف a و x از درجهٔ نهم است .

۱۳ - **مرتب کردن چندجمله‌ای بر حسب قوای نزولی یا صعودی يك‌حرف** ، یعنی‌جمله‌های چندجمله‌ای طوری نوشته شوندکه نماینده‌های‌حرف مورد نظر ، از هرجمله به‌جملهٔ بعدی، بترتیب‌کم یا

بترتیب زیاد شوند؛ درحالت اول، چندجمله‌ای برحسب قوای نزولی آن حرف و در حالت دوم ، برحسب قوای صعودی آن حرف مرتب شده است .

مثلا چندجمله‌ای : $a^۳+۳a^۲b+ab^۲+b^۳$ بر حسب قوای نزولی a و برحسب قوای صعودی b مرتب شده است .

۱۴ - پرانتز برداری - اگرجلوی‌پرانتزی‌علامت (+) باشد، می‌توان علامت (+) و پرانتزرا حذف‌کرد . چنانچه جلوی پرانتزی علامت: − (منها) باشد، بازهم می‌توان علامت: − (منها) و پرانتز را حذف‌کرد به شرط اینکه علامتهای تمام جمله‌های درون پرانتزرا تغییر دهیم .

قوای اعداد جبری

۱۵ - هرگاه عددی چندمرتبه درخودضرب شود ،گویند آن‌عدد به توان رسیده است :

$۲^۳=۲\times۲\times۲=۸$ یا $(-۴)^۲=(-۴)(-۴)=+۱۶$

عددی را که درخود ضرب می‌شود، **پایه** و عدهٔ دفعاتی راکه آن عدد در خود ضرب شده است **نما** یا **نماینده** می‌گویند. درمثال اول۲ را پایه و۳ را نما و درمثال دوم (۴−) را پایه و ۲ را نما می‌گویند.

۱۶ - درجمع وتفریق توانها، ابتدا باید حاصل هریك ازتوانها را حساب‌کرد وسپس عمل جمع یا تفریق را دربارهٔ حاصلها انجام داد.

مثال :

$$(-۲)^۵+(-۵)^۲-(+۲)^۳=(-۳۲)+(+۲۵)-(+۸)$$
$$=-۳۲+۲۵-۸=-۱۵$$

۱۷ - درضرب توانها چندحالت اتفاق می‌افتد :

حالت‌اول-پایه‌های‌عوامل‌ضرب متساوی و نماهای آنهامختلف است : دراین‌حالت ،حاصل‌ضرب توانهای مفروض به‌این ترتیب‌بدست می‌آیدکه پایهٔ یکی‌ازعوامل‌ضرب رانوشته و نمای‌آن رامساوی‌مجموع نماهای عوامل ضرب قرار دهیم .

$۲^۳\times۲^۵=۲^{۳+۵}=۲^۸$ و $x^۳\times x=x^{۳+۱}=x^۴$

$(-۴)^۳.(-۴)^۶=(-۴)^{۳+۶}=(-۴)^۹$

و $a^۲\times a\times a^۳=a^{۲+۱+۳}=a^۶$

حالت دوم - پایه‌های عوامل‌ضرب مختلف و نماهای آنها متساویند :

دراین حالت ،حاصل‌ضرب توانهای مفروض به‌این ترتیب‌بدست می‌آیدکه پایه‌های عوامل ضرب را درهم ضرب‌کرده نتیجهٔ عمل‌را پایه قرار دهیم و برای این پایه نماینده‌ای مساوی با نمایندهٔ یکی‌از عوامل ضرب بنویسیم .

$$۳^۴\times۵^۴=(۳\times۵)^۴=۱۵^۴$$
$$(-۲)^۴.(+۵)^۴=[(-۲)(+۵)]^۴=(-۱۰)^۴$$
$$\left(\frac{۳}{۴}\right)^۲.\left(-\frac{۲}{۳}\right)^۲=\left[\left(\frac{۳}{۴}\right).\left(-\frac{۲}{۳}\right)\right]^۲=\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲$$

حالت سوم - پایه‌های عوامل ضرب وهمچنین نماهای آنها مختلف است :

دراین‌حالت برای تعیین‌حاصل ضرب توانها ،هریك از عوامل ضرب را جداگانه به‌توان رسانیده وحاصل آنهارا درهم ضرب‌می‌کنند.

$$۵^۲ \times ۲^۳ = ۲۵ \times ۸ = ۲۰۰$$

$$(-۱)^۳(+۲)^۴ = (-۱)(+۱۶) = -۱۶$$

حالت چهارم -پایه‌های عوامل ضرب‌باهم‌ونماهای آنها نیز باهم متساویند :

دراین‌حالت (حالت خاص از حالات‌اول یادوم) ، می‌توان طبق حالات اول یا دوم حاصل را بدست آورد .

مثال :

طبق‌حالت اول : $۵^۳ \times ۵^۳ = ۵^{۳+۳} = ۵^۶$

طبق حالت دوم : $۵^۳ \times ۵^۳ = (۵ \times ۵)^۳ = (۵^۲)^۳$

چون حاصل‌ضربها باید متساوی باشند ، $۵^۶ = (۵^۲)^۳$

یعنی : اگر بخواهیم‌توانی را به توان جدیدبرسانیم‌حاصل عمل به این ترتیب‌بدست می‌آیدکه پایه را نوشته و نمایندهٔ آن‌را برابرحاصل‌ضرب نمای قدیم وجدید قرار دهیم .

مثال : $(-۳)^۶ = [(-۳)^۲]^۳$ و $۲^{۱۲} = (۲^۳)^۴$

۱۸- درتقسیم‌توانها هم مانند ضرب چند حالت اتفاق می‌افتد:

حالت‌اول-پایه‌های مقسوم ومقسوم‌علیه متساوی ونماهای آنها مختلف است :

دراین حالت، خارج‌قسمت توانهای مفروض به‌این‌ترتیب بدست می‌آیدکه‌پایهٔ‌مقسوم‌یامقسوم‌علیه‌را نوشته ونمای آن را مساوی‌باقیماندهٔ تفریق نمای مقسوم‌علیه از نمای مقسوم قرار دهیم .

$$۴^۵ : ۴^۳ = \frac{۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴}{۴ \times ۴ \times ۴} = ۴^{۵-۳} = ۴^۲$$

$$a^۳ : a = \frac{a \times a \times a}{a} = a^{۳-۱} = a^۲$$

حالت دوم - نماهای‌مقسوم‌ومقسوم‌علیه متساوی وپایه‌های آنها مختلف است :

در این‌حالت، خارج قسمت‌توانهای مفروض‌به‌این ترتیب بدست می‌آیدکه پایهٔ مقسوم را برپایهٔ مقسوم‌علیه تقسیم کرده حاصل عمل را پایه قرار دهیم و برای این پایه نماینده‌ای مساوی با نمایندهٔ مقسوم یا مقسوم‌علیه بنویسیم .

$$۱۲^۲ : ۴^۲ = \left(\frac{۱۲}{۴}\right)^۲ = ۳^۲ \quad و \quad ۱۵^۴ : ۱۰^۴ = \left(\frac{۱۵}{۱۰}\right)^۴ = \left(\frac{۳}{۲}\right)^۴ = (۱/۵)^۴$$

$$۱۸^۳ : ۹^۳ = \left(\frac{۱۸}{۹}\right)^۳ = ۲^۳ \quad و \quad x^m : y^m = \left(\frac{x}{y}\right)^m$$

حالت‌سوم - پایه‌های مقسوم و مقسوم‌علیه و نما های آنها هردو مختلفند .

در این حالت، مقسوم ومقسوم‌علیه را جدا جدا به‌توان رسانیده حاصل آنها را برهم تقسیم می‌کنند .

$$۵^۲ : ۲^۳ = ۲۵ : ۸ = \frac{۲۵}{۸}$$

حالت‌چهارم - پایه‌های‌مقسوم ومقسوم‌علیه‌باهم ونماهای آنها نیز باهم مساویند .

در این حالت (حالت خاص از حالات اول یا دوم) ، می‌توان طبق حالت اول یا طبق حالت دوم عمل‌کرد .

طبق حالت اول: $5^2:5^2=5^{2-2}=5^0$

طبق حالت دوم: $5^2:5^2=\left(\frac{5}{5}\right)^2=1^2=1$

چون خارج قسمتها باید متساوی باشند ، $5^0=1$.

یا در حالت‌کلی :

$$x^m:x^m=x^{m-m}=x^0$$

$$x^m:x^m=\left(\frac{x}{x}\right)^m=1^m=1$$

$$\boxed{x^0=1}$$

نتیجه ـ تعریف ـ هرعدد به‌توان‌صفر، مساوی واحد است .

تبصره ـ در تقسیم توانها وقتی پایه‌ها متساوی باشند (حالت اول) ، چنانچه نمای مقسوم‌علیه از نمای مقسوم بزرگتر باشد چنین خواهیم داشت :

$$x^2:x^5=x^{2-5}=x^{-3}$$

برای پیداکردن حاصل این‌نمای منفی (x^{-3}) ، تقسیم را به طریق دیگر انجام می‌دهیم :

$$x^2:x^5=\frac{x\cdot x}{x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x}=\frac{1}{x^3}$$

چون خارج قسمتها باید متساوی باشند، $x^{-3}=\frac{1}{x^3}$

نتیجه ـ تعریف ـ توان منفی هرعدد جبری مساوی است با عکس آن عدد با توانی قرینهٔ توان مفروض .

$$x^{-2}=\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{x^2}$$

$$x^{-3}=\left(\frac{1}{x}\right)^3=\frac{1}{x^3}$$

$$b^{-1}=\left(\frac{1}{b}\right)^1=\frac{1}{b}$$

عبارتهای متعادل ـ اتحادها

۱۹ ـ تعریف ۱ ـ دو عبارت جبری را **متعادل** (**یا متحد**) گویند هرگاه به ازای هر دستگاه مقادیر عددی‌که به حروف آن دو عبارت نسبت داده شود ، برای دو عبارت مزبور مقادیر عددی متساوی بدست آید .

۲۰ ـ تعریف ۲ ـ تساوی دو عبارت جبری متحد را **اتحاد** می‌نامند . از این تعریف نتیجه می‌شود : به ازای هر دستگاه مقادیر عددی‌که به حروف یك اتحاد نسبت داده شود، اتحاد برقرار است ؛ علاوه بر این باید دانست‌که تساوی **دو عبارت متحد** (یعنی برقراری یك اتحاد) ، به ازای هر دستگاه از عبارات جبری‌که به حروف آن **دو عبارت** نسبت داده شود محفوظ می‌ماند .

معمولا با عملیات جبری دوعبارت متحد را می‌توان به یکدیگر تبدیل‌کرد .

۲۱ ـ اتحادهایی را که در سالهای گذشته آموخته‌اید و باید آنها را بخاطر سپرد ، دراینجا به شرح زیر یادآوری می‌کنیم :

اتحاد اول ـ مربع مجموع دوجمله :

$$(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$$

مثال :

$$(2x+1)^2=4x^2+4x+1$$
$$\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{16}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$$
$$(3x^3+4y^4)^2=9x^6+24x^3y^4+16y^8$$

اتحاددوم ـ مربع تفاضل دوجمله :

$$(a-b)^2 \equiv a^2-2ab+b^2$$

مثال :

$$\left(3x-\frac{1}{4}\right)^2=9x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{16}$$
$$(2a^2b-3ab^2)^2=4a^4b^2-12a^3b^3+9a^2b^4$$
$$(3x^3-4y^4)^2=9x^6-24x^3y^4+16y^8$$

اتحاد سوم ـ اتحاد مزدوج :

$$(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$$

مثال : $(2x-1)(2x+1)=4x^2-1$

$$\left(x^2+\frac{1}{5}\right)\left(x^2-\frac{1}{5}\right)=x^4-\frac{1}{25}$$
$$[(a+b)+c][(a+b)-c]=(a+b)^2-c^2$$
$$[(2x+3y)-(a-2b)][(2x+3y)+(a-2b)]=(2x+3y)^2-(a-2b)^2$$

$$(3-2x)(2x+3)=9-4x^2$$
$$(-5-ab)(-5+ab)=(-5)^2-(ab)^2=25-a^2b^2$$

اتحاد چهارم :

$$(x+a)(x+b) \equiv x^2+(a+b)x+ab$$

یعنی : حاصل ضرب دوپرانتز دوجمله‌ای که در یك جمله مشترکند به‌ترتیب زیر بدست می‌آید :

الف ـ جملهٔ مشترك را به توان ۲ می‌رسانیم .

ب ـ مجموع جبری دو جملهٔ غیر مشترك را در جملهٔ مشترك ضرب می‌کنیم .

ج ـ حاصل‌ضرب دوجملهٔ غیرمشترك را تعیین می‌کنیم .

د ـ حاصلهای عملیات قسمتهای (**الف و ب و ج**) را با هم جمع می‌کنیم .

نتیجهٔ عاید از قسمت (**د**) حاصل‌ضرب مطلوب خواهد بود .

مثال :

$$(x+3)(x+5)=x^2+8x+15$$
$$(x-5)(x-3)=x^2-8x+15$$
$$(x+5)(x-3)=x^2+2x-15$$
$$(x-5)(x+3)=x^2-2x-15$$
$$(2x-7)(2x+5)=4x^2-4x-35$$
$$(3a-2b)(3a+b)=9a^2-3ab-2b^2$$

اتحاد پنجم ـ مربع کثیرالجمله‌ها :

مربع هر کثیرالجمله مساوی‌است با مجموع‌مربعات هر یك‌ازجمله‌هایش بعلاوهٔ مجموع جبری دوبرابر حاصل ضرب جمله‌ها که دوبدو و بدون تکرار اختیار شوند.

تذکر ـ در مورد مجذور کردن یك کثیرالجمله ، ضمن إعمال قاعدهٔ بالا، برای مصون ماندن‌از اشتباه واحتراز ازفراموشی‌در نوشتن

بعضی ازجمله‌ها ، بهتر است ابتدا مجموع مربعات تمام جمله‌ها و به دنبال آن مجموع جبری دوبرابر حاصل‌ضرب جمله‌ها که باید دوبدو اختیار شوند نوشته شود . دوبرابر حاصل‌ضرب جمله‌ها نیز که باید دوبدو اختیار شوند، به‌این‌ترتیب بدست می‌آیدکه ابتدا دوبرابرجملهٔ اول رامتدرجاً درهریك از جمله‌های بعدی بارعایت علامات ضرب‌کنیم ودر مرحلهٔ دوم ، دوبرابرجملهٔ دوم را متدرجاً درهریك از جمله‌های بعدازآن‌بارعایت علامات ضرب‌کنیم ودروهلهٔ سوم ، دوبرابر جملهٔ سوم را متدرجاً در هریك از جمله‌های بعدی ضرب‌کنیم و عمل را به همین روش‌برای جمله‌های چهارم‌وپنجم و ..... ازکثیرالجملهٔ مفروض‌ادامه دهیم تاکلیهٔ جمله‌های لازم بدست آیند .

مثال :

$$(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$$

$$(2x^2-3x-1)^2=4x^4+9x^2+1-12x^3-4x^2+6x$$
$$=4x^4-12x^3+5x^2+6x+1$$

$$(a+b-c-d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2ac$$
$$-2ad-2bc-2bd+2cd$$

$$(a-b+c-x+y)^2=a^2+b^2+c^2+x^2+y^2-2ab$$
$$+2ac-2ax+2ay-2bc+2bx$$
$$-2by-2cx+2cy-2xy$$

اتحاد ششم ـ مکعب مجموع دوجمله :

$$(a+b)^3\equiv a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

مثال :

$$(2x+3y)^3=8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$$

$$\left(2a^2+\frac{1}{2}\right)^3=8a^6+6a^4+\frac{3}{2}a^2+\frac{1}{8}$$

اتحاد هفتم ـ مکعب تفاضل دوجمله :

$$(a-b)^3\equiv a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

مثال :

$$(x-5)^3=x^3-15x^2+75x-125$$

$$(4a^2-3b^3)^3=64a^6-144a^4b^3+108a^2b^6-27b^9$$

$$\left(\frac{1}{5}a-\frac{1}{6}b\right)^3=\frac{1}{125}a^3-\frac{1}{50}a^2b+\frac{1}{60}ab^2-\frac{1}{216}b^3$$

اتحاد هشتم ـ

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)\equiv a^3+b^3$$

مثال :

$$(2x+1)(4x^2-2x+1)=8x^3+1$$

$$\left(\frac{1}{2}a+1\right)\left(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}a+1\right)=\frac{1}{8}a^3+1$$

$$\left(\frac{1}{2}+a\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{2}+a^2\right)=\frac{1}{8}+a^3$$

اتحاد نهم ـ

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)\equiv a^3-b^3$$

مثال :

$$(2a-5b)(4a^2+10ab+25b^2)=8a^3-125b^3$$

$$(6x^2-7y)(36x^4+42x^2y+49y^2)=216x^6-343y^3$$

دوجمله‌ای ـ دستور بینم (Binôme)

۲۲ ـ تعریف ـ هرعبارت جبری که فقط شامل دوجمله باشد ، **دوجمله‌ای** یا **بینم** نام دارد .

۲۳ ـ دستور بینم ـ ضمن شمارهٔ (۲۱ این فصل)، حاصل عبارتهای $(a\pm b)^2$ و $(a\pm b)^3$ یعنی فقط حاصل توان دوم وسوم دوجمله‌ایهای $(a\pm b)$ را یادآوری کردیم ؛ درتکمیل مطالبی که دراین باره گفته شد، متذکر می‌شویم برای اینکه دوجمله‌ایهای $(a+b)$ یا $(a-b)$ را به توانی بیش از توان سوم برسانیم ، قاعده ودستور دیگری به‌نام دستور دوجمله‌ای نیوتون درکار است که ذیلا ضمن یك مثال (وبدون اثبات) به ذکر آن می‌پردازیم :

مثال : فرض می‌کنیم بخواهیم حاصل توان هفتم $(a+b)$ یعنی حاصل $(a+b)^7$ را تعیین‌کنیم :

بدواً متذکر می‌شویم‌که اگر دوجمله‌ای $(a+b)$ را بطورکلی به توان n (n عددی است صحیح‌ومثبت) برسانیم ، حاصل $(a+b)^n$ شامل مجموع جبری $(n+1)$ جمله خواهد بود ؛ مثلا دراینجاکه مقصود ، تعیین حاصل $(a+b)^7$ است ، حاصل عمل شامل مجموع جبری هشت $(7+1=8)$ جمله‌خواهد بودکه هریك از آنها را متدرجاً طبق‌قاعدهٔ زیر تعیین می‌کنیم :

الف ـ در دوجمله‌ای $(a+b)$ ، جملهٔ اول یعنی a را به‌توان هفت وجملهٔ دوم یعنی b را به توان صفر می‌رسانیم و حاصلها را درهم ضرب‌می‌کنیم، نتیجه به‌این‌صورت خواهد بود: a^7b^0 ؛ این‌یك‌جمله‌ای،

اولین جمله از هشت جملهٔ مطلوب است؛ بدیهی است چون b^0 برابر واحد است، خلاصهٔ جملهٔ a^7b^0 می‌شود a^7 $(a^7b^0=a^7\times 1=a^7)$.

ب ـ ضریب جملهٔ دوم ازحاصل مطلوب طبق قاعدهٔ زیر بدست می‌آید :

درجملهٔ‌اول (a^7b^0) ، حاصل ضرب ضریب این‌جمله ونمایندهٔ a، (1×7)، را برعددی‌که به‌اندازهٔ یك‌واحد ازنمایندهٔ b بیشترباشد، $(0+1)$، تقسیم می‌کنیم؛ طبق این‌قاعده ضریب‌جملهٔ دوم چنین‌می‌شود:

$$\frac{1\times 7}{0+1}=\frac{7}{1}=7$$

برای تعیین‌حروف جملهٔ دوم ،کافی است درجملهٔ اول ، a^7b^0 ، یك‌واحدازنمایندهٔ a کاسته ویك‌واحدبه‌نمایندهٔ b اضافه‌کنیم؛ وبنابراین قاعده ، حروف جملهٔ دوم چنین خواهند بود :

$a^{7-1}.b^{0+1}$ یعنی : a^6b

در نتیجه با تعیین ضریب و حروف جملهٔ دوم، خود این‌جمله ، یعنی جملهٔ دوم از هشت جملهٔ مطلوب، برابر $7a^6b$ می‌شود .

ج ـ ضریب جملهٔ سوم به‌ترتیب زیربدست می‌آید :

در جملهٔ دوم $(7a^6b)$ ، حاصل‌ضرب ضریب این‌جمله و نمایندهٔ a، (7×6)، را برعددی‌که یك‌واحدازنمایندهٔ b بیشترباشد، $(1+1)$، تقسیم می‌کنیم. وچون طبق این‌قاعده عمل‌کنیم چنین خواهیم داشت :

$$\frac{7\times 6}{1+1}=\frac{42}{2}=21$$

پس ضریب جملهٔ سوم می‌شود : ۲۱ .

برای تعیین حروف جملهٔ سوم ،کفایت می‌کندکه در جملهٔ دوم ، ($7a^6b$) ، یك‌واحدازنمایندهٔ a کاسته ویك واحد برنمایندهٔ b بیفزاییم وطبق‌این‌قاعده، حروف جملهٔ سوم می‌شود: $a^{6-1}.b^{1+1}$ یعنی a^5b^2.

پس‌ازآنکه ضریب وحروف جملهٔ سوم معین شدند، خود جملهٔ سوم از هشت‌جملهٔ مطلوب ، چنین می‌شود: $21a^5b^2$.

د ـ بطورکلی برای اینکه از روی یك‌جملهٔ‌معلوم، جملهٔ‌بعدی را بنویسیم، باید ابتدا ضریب وسپس‌حروف جملهٔ بعدی را تعیین‌کنیم وبرای انجام دادن این‌مقصود، قاعده براین‌است‌که اولا درجملهٔ‌معلوم حاصل ضرب ضریب این جمله ونمایندهٔ a را برعددی‌که به‌اندازهٔ یك واحد از نمایندهٔ b درهمین جمله بیشترباشد تقسیم‌کنیم تاضریب جملهٔ بعدی‌بدست‌آید. وثانیاً باید درجملهٔ‌معلوم،یك‌واحد ازنمایندهٔ a بکاهیم ویك واحد به نمایندهٔ b بیفزاییم‌که حروف جملهٔ بعدی عاید شود و با تعیین ضریب وحروف جملهٔ بعدی، نوشتن آن اشکالی‌نخواهد داشت .

چون عمل را طبق همین قاعده وروش متدرجاً ادامه دهیم وپیش‌رویم، بالاخره به‌جملهٔ ($1\times a^0\times b^7$) یعنی b^7 خواهیم رسیدکه‌درآن نمایندهٔ a برابرصفر ونمایندهٔ b برابرهفت می‌شود. درموقعی‌که ضمن عملیات مذکور به‌جملهٔ b^7 برسیم، بسط $(a+b)^7$تمام شده است .

با بکاربردن قاعدهٔ بالابسط $(a+b)^7$ به‌این‌صورت خواهدبود :

$$(a+b)^7=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$$

یادآوری بعضی خواص از بسط $(a+b)^n$:

I ـ باتوجه به‌تذکری‌که‌درمقدمهٔ مثال اخیر داده شد ، بسهولت استنباط می‌شودکه درعبارت $(a+b)^n$ ، برحسب آنکه عدد n زوج یا فرد باشد ، عدهٔ جمله‌هایی‌که ازبسط$(a+b)^n$ بدست می‌آیند، بترتیب فرد یا زوج خواهند بود .

II ـ در بسط $(a+b)^n$ ، ضرایب جمله‌های متساوی‌البُعد از طرفین، متساویند .

III ـ در بسط $(a-b)^n$ یعنی $[a+(-b)]^n$، که طبق همان قاعدهٔ‌مذکور درمثال اخیر بسط داده می‌شود، اولین‌جمله‌مسبوق به‌علامت (+) وجمله‌های بعدی بترتیب یك در میان مسبوق به علامت (−) و (+) خواهند بود ؛ مثلا بسط عبارت $(x-y)^5$ چنین می‌شود :

$$\begin{aligned}(x-y)^5&=[x+(-y)]^5=x^5(-y)^0+5x^4(-y)^1\\&+10x^3(-y)^2+10x^2(-y)^3+5x(-y)^4\\&+1\times x^0(-y)^5\\&=x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5\end{aligned}$$

تبصره ـ اگر بخواهیم عبارت $(2x-3y)^4$ را طبق دستور دو جمله‌ای نیوتن بسط دهیم، ابتدا فرض می‌کنیم : $2x=a$ و $3y=b$ ؛ درنتیجه چنین خواهیم داشت :

$$(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$$

اینك‌به‌جای a و b مقادیرشان را بترتیب ۲x و۳y قرارمی‌دهیم:

$$(2x-3y)^4=(2x)^4-4(2x)^3(3y)+6(2x)^2(3y)^2$$
$$-4\times 2x(3y)^3+(3y)^4$$
$$=16x^4-96x^3y+216x^2y^2-216xy^3+81y^4$$

تجزیهٔ عبارت جبری به حاصل ضرب عوامل

۲۴ ـ تجزیهٔ یك عبارت‌جبری، یعنی تبدیل آن به حاصل‌ضرب چند عامل بقسمی‌که هیچیك از آن عوامل تجزیه‌پذیر نباشند .

درتجزیه از فاکتورگیری و اتحاد استفاده می‌کنند .

۲۵ ـ فاکتورگیری ـ فاکتور یاعامل مشترك یك عبارت جبری را به طریق زیر تعیین می‌کنند :

الف ـ بین ضرایب‌جمله‌های مختلف عبارت جبری، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك می‌گیرند ؛ حاصل این‌عمل، فاکتور ضرایب خواهد بود .

ب ـ بین حروف و پرانتزهای مشترك در تمام جمله‌های‌عبارت جبری، آنهایی راکه توانشان‌کمتر است اختیار می‌کنند؛ حاصل‌ضرب این قبیل‌حروف وپرانتزها، فاکتور حروف وپرانتزهای عبارت جبری خواهد بود .

ج ـ باانجام دادن دوعمل‌قسمتهای(**الف و ب**)، فاکتور عبارت جبری، حاصل‌ضرب فاکتور ضرایب درفاکتور حروف و پرانتزهای آن خواهد بود .

مثال :

$$18x^2+24x+36=6(3x^2+4x+6)$$
$$4x^3y^2+12x^2y^3=4x^2y^2(x+3y)$$
$$4a^2(x+y)+8a(x+y)=4a(x+y)(a+2)$$
$$(a-b)^2+2(a-b)=(a-b)(a-b+2)$$

تبصرهٔ ۱ ـ اگرضرایب‌جمله‌های یك عبارت جبری‌متحدالعلامه باشند ، فاکتور ، هم‌علامت باآنهاست وچنانچه ضرایب جمله‌های‌عبارت جبری مختلف‌العلامه باشند، می‌توانیم برحسب ضرورت علامت‌فاکتور را (+) یا (−) اختیارکنیم :

مثال ۱ :

$$6ax^2(x-1)+12a^2x(x-1)^2=6ax(x-1)[x+2a(x-1)]$$
$$=6ax(x-1)(x+2ax-2a)$$

مثال ۲ :

$$x^3-x^2-x=-x(-x^2+x+1)$$

مثال ۳ :

$$9x^4y^3-12x^3y^4=+3x^3y^3(3x-4y)$$

یا :

$$9x^4y^3-12x^3y^4=-3x^3y^3(-3x+4y)$$
$$=-3x^3y^3(4y-3x)$$

تبصرهٔ۲ ـ علاوه برمطالبی‌که ضمن تبصرهٔ ۱ (شمارهٔ ۲۵) یاد‌آوری شد ، در یك عبارت جبری ، ممکن است به مناسبتی بر حسب موقعیت و مقام ، ضریب یا حروف یا پرانتز دلخواهی را عامل مشترك (فاکتور) قرار دهیم؛مثلا درعبارت زیر :

$$6a^2x^3-3ax^4+21a^2x^5$$

برحسب آنکه جملهٔ $3ax^2$ یا $-3ax^2$ یا $-\frac{3}{5}$ یا x^4 یا ab یا $(a-b)$

را عامل مشترك قراردهیم، بترتیب چنین خواهیم داشت:

$$6a^2x^3-3ax^4+21a^2x^5=3ax^3(2a-x+7ax^2)$$

و $$6a^2x^3-3ax^4+21a^2x^5=-3ax^3(-2a+x-7ax^2)$$

و $$6a^2x^3-3ax^4+21a^2x^5=$$

$$-\frac{3}{5}(-10a^2x^3+5ax^4-35a^2x^5)$$

و $$6a^2x^3-3ax^4+21a^2x^5=x^4\left(\frac{6a^2}{x}-3a+21a^2x\right)$$

و $$6a^2x^3-3ax^4+21a^2x^5=ab\left(\frac{6ax^3}{b}-\frac{3x^4}{b}+\frac{21ax^5}{b}\right)$$

و $$6a^2x^3-3ax^4+21a^2x^5=$$

$$(a-b)\left(\frac{6a^2x^3}{a-b}-\frac{3ax^4}{a-b}+\frac{21a^2x^5}{a-b}\right)$$

۲۶-تجزیه ازطریق‌دسته‌بندی - چنانچه تمام جمله‌های یك عبارت‌جبری، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك یعنی‌فاکتور مشترکی نداشته باشند، می‌توان جمله‌های آن عبارت را دسته بندی‌کرد، بطوری‌که هر دسته‌فاکتوری‌جداگانه‌داشته‌باشد؛ بکاربردن‌این‌طریقه ، به منظورتجزیهٔ یك عبارت جبری، وقتی مفیداست‌که‌عبارتهای حاصل ازفاکتورگیری‌در هردسته ، خود دارای فاکتور مشترکی باشند .

مثال ۱ :

$$6ax+9ay-4bx-6by=3a(2x+3y)-2b(2x+3y)$$
$$=(2x+3y)(3a-2b)$$

مثال ۲ :

$$2ax^2-bx^2+2ax-bx-2a+b=$$
$$2ax^2+2ax-2a-bx^2-bx+b=$$
$$2a(x^2+x-1)-b(x^2+x-1)=$$
$$(x^2+x-1)(2a-b)$$

۲۷ - تجزیه به‌کمك اتحادها - می‌دانیم‌که :

$$(E) \qquad a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$$

با توجه به تساوی (E)عبارتهایی به شکل $a^2\pm 2ab+b^2$ را بترتیب به صورت $(a\pm b)^2$ یعنی $(a+b)(a+b)$ یا$(a-b)(a-b)$ می‌توان تجزیه‌کرد .

۲۸ - از مطالب بالا نتیجه می‌شود هرسه‌جمله‌ای‌که دوجملهٔ‌آن مسبوق به‌علامت (+) و جذرکامل داشته وجملهٔ سوم مساوی دو برابر حاصل‌ضرب آن دوجذر باشد، تجزیه پذیراست .

تبصرهٔ ۱ - درجذر هرجمله، ازضریب آن‌جمله جذر می‌گیریم وتوانهای حروفش را نصف می‌کنیم .

تبصرهٔ ۲ -اگردوجمله‌ازسه‌جمله‌ای مذکور درشمارهٔ ۲۸مسبوق به علامت (−) بوده‌وصرف‌نظر ازعلامت (−) جذرکامل داشته باشند، ابتدا درسه‌جمله‌ای از (۱−)فاکتورمی‌گیریم، سپس‌عبارت داخل‌پرانتز را طبق دستوربالا تجزیه می‌کنیم .

مثال :

الف : $x^2+6x+9=(x+3)^2$

ب : $25a^2-30ab+9b^2=(5a-3b)^2$

ج : $4x^2+12xy+9y^2=(2x+3y)^2$

د : $۲x - x^۲ - ۱ = -(x^۲ - ۲x + ۱) = -(x - ۱)^۲$

ه : $۱۸xy - x^۲ - ۸۱y^۲ = -(۸۱y^۲ - ۱۸xy + x^۲)$
$$= -(۹y - x)^۲$$

۴۹ - تجزیه به کمک اتحاد مزدوج - می‌دانیم :

$$(E') \quad a^۲ - b^۲ \equiv (a+b)(a-b)$$

یعنی عبارت $a^۲ - b^۲$ را می‌توان به صورت $(a+b)(a-b)$ تجزیه‌کرد؛ بابیان دیگر، رابطهٔ (E') چنین معنی می‌دهد :

تفاضل دومجذور کامل مساوی‌است با :

(جذر دومی - جذراولی) (جذردومی + جذر اولی)

مثال :

الف : $x^۲ - ۴ = (x+۲)(x-۲)$

ب : $۴a^۲ - ۹b^۲ = (۲a+۳b)(۲a-۳b)$

ج : $-x^۴ + ۱ = ۱^۲ - (x^۲)^۲ = (۱+x^۲)(۱-x^۲)$
$$= (۱+x^۲)(۱^۲ - x^۲) = (۱+x^۲)(۱+x)(۱-x)$$

د : $۱۶ - x^۴ = ۴^۲ - (x^۲)^۲ = (۴+x^۲)(۴-x^۲)$
$$= (۴+x^۲)(۲^۲ - x^۲) = (۴+x^۲)(۲+x)(۲-x)$$

ه : $x^۸ - ۱ = (x^۴)^۲ - ۱^۲ = (x^۴+۱)(x^۴-۱)$
$$= (x^۴+۱)[(x^۲)^۲ - ۱^۲] = (x^۴+۱)(x^۲+۱)(x^۲-۱)$$
$$= (x^۴+۱)(x^۲+۱)(x^۲-۱^۲)$$
$$= (x^۴+۱)(x^۲+۱)(x+۱)(x-۱)$$

و : $(۴x+y)^۲ - ۱ = (۴x+y)^۲ - ۱^۲$
$$= [(۴x+y)+۱][(۴x+y)-۱]$$
$$= (۴x+y+۱)(۴x+y-۱)$$

ز : $(۲x-۳)^۲ - (۴x+۱)^۲$
$$= [(۲x-۳)+(۴x+۱)][(۲x-۳)-(۴x+۱)]$$
$$= (۲x-۳+۴x+۱)(۲x-۳-۴x-۱)$$
$$= (۶x-۲)(-۲x-۴) = ۲(۳x-۱)[-۲(x+۲)]$$
$$= -۴(۳x-۱)(x+۲)$$

۳۰ - تجزیه به‌کمک اتحاد :

$$(E'') \qquad x^۲ + (a+b)x + ab \equiv (x+a)(x+b)$$

بااندك‌دقت وتعمق درساختمان وترکیب جمله‌ها و عوامل‌طرفین تساوی (E'') ، نکات زیر بسهولت استنباط می‌شود :

الف - درطرف اول رابطهٔ (E'') ، ضریب‌جملهٔ‌اول، یعنی ضریب $x^۲$ برابر واحداست وجذراین‌جمله می‌شود: x ؛ واین‌جذرهمان‌جملهٔ مشترك بین دو عامل ضرب $(x+a)$ و $(x+b)$ است که در طرف دوم تساوی (E'') وجود دارند .

ب - در طرف اول رابطهٔ (E'') ضریب‌جملهٔ دوم ، یعنی ضریب جملهٔ $(a+b)x$ می‌شود: $(a+b)$ ؛ و این ضریب مجموع جبری a و b یعنی مجموع جبری دو جملهٔ غیر مشترك بین دو عامل ضرب $(x+a)$ و $(x+b)$ می‌باشدکه درطرف‌دوم تساوی (E'') وجوددارند .

بطورخلاصه : ضریب جملهٔ دوم طرف اول تساوی (E'') مساوی است بامجموع جبری دوجملهٔ غیرمشترك‌بین عوامل ضرب $(x+a)$ و $(x+b)$ مندرج در طرف دوم رابطهٔ (E'') .

ج - جملهٔ سوم طرف اول رابطهٔ (E'') یعنی ab ، حاصل‌ضرب

دوعدد جبری a و b است‌که این‌دوعدد همان جمله‌های غیرمشترك بین دوعامل‌ضرب $(x+a)$ و $(x+b)$ ، موجوددرطرف دوم رابطهٔ (E'') ، می‌باشند .

باتوجه به مطالب مذکور درقسمتهای (**الف** و **ب** و **ج**) وتطبیق آنها باا‌جزای مختلف تساوی (E'') واضح می‌شود :

هرسه‌جمله‌ای درجهٔ دوم از حرفی مانند x ، که در آن ضریب جملهٔ درجهٔ دوم یعنی ضریب x^2 برابرواحد باشد ، درصورتی تجزیه‌پذیر است‌که پس‌از مرتب‌کردن آن سه‌جمله‌ای نسبت به قوای نزولی x ، تعیین دوعدد جبری بادوشرط زیرمیسّر باشد :

I ـ مجموع آن دوعدد جبری برابر با ضریب دومین جمله از سه‌جمله‌ای مفروض (یعنی برابر باضریب x) باشد .

II ـ حاصل ضرب آن دوعدد جبری برابر با سومین جمله از سه‌جمله‌ای مفروض باشد .

بطورخلاصه : هروقت درسه‌جمله‌ای درجهٔ‌دوم‌مفروضی‌که‌نسبت به قوای‌نزولی x مرتب‌وضریب x^2 درآن برابرواحد باشد،پیداکردن دوعدد جبری مانند a و b با دو شرط(I)و(II) میسر شود، سه‌جمله‌ای مفروض بااستفاده ازرابطهٔ (E'') به دو عامل ضرب $(x+a)$ و $(x+b)$ به‌صورت: $(x+a)(x+b)$ تجزیه خواهد شد .

تبصره ـ چنانچه‌دریك‌سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم‌ازحرف x ، ضریب x^2 عددی غیراز واحد مانند عدد جبری c باشد ، ابتدا در سه‌جمله‌ای مورد نظر عدد جبری c را عامل مشترك قرار می‌دهند و بعد از آن ،

عبارت‌داخل پرانتز را در صورت امکان طبق قاعدهٔ بالاتجزیه می‌کنند.

مثال ۱ ـ عبارت: $x^2-16x+48$ را تجزیه‌کنید .

در سه‌جمله‌ای مفروض‌که نسبت به قوای نزولی x مرتب است، ضریب x^2 برابر واحد است؛ پس اگرسه جمله‌ای مفروض به دو عامل ضرب تجزیه پذیر باشد، جذر x^2 یعنی x جملهٔ مشترك دوعامل ضرب مطلوب خواهد بود .

حال برطبق مطالبی که ضمن شمارهٔ ۳۰ گفته شد ، باید دو عدد جبری مانند a و b بقسمی تعیین‌کنیم‌که اولا مجموع آنها ،$(a+b)$ ، برابرباضریب دومین جمله ازسه‌جمله‌ای مفروض یعنی برابر (۱۶−) و ثانیاً حاصل ضرب آنها ، ab ، برابر سومین جمله از سه‌جمله‌ای مفروض یعنی برابر (۴۸+) باشد ؛ با تجسس و آزمایش روی اعداد مناسب با این مقصود ، دو عدد (۱۲−) و (۴−) بدست می‌آیند و طبق رابطهٔ (E'') چنین خواهیم داشت :

$$x^2-16x+48=(x-4)(x-12)$$

مثال ۲ ـ عبارت: $x^2-8x-128$ را تجزیه‌کنید.

چون مانند مثال ۱ استدلال‌کنیم، معلوم می‌شود که برای تجزیهٔ سه‌جمله‌ای مفروض باید دو عدد جبری a و b را بقسمی تعیین کنیم که مجموعشان (۸−) و حاصل ضربشان (۱۲۸−) باشد .

در اینجا ملاحظه می‌کنیم که اولا حاصل ضرب دو عدد مطلوب یعنی (۱۲۸−) منفی است ؛ پس دو عدد مطلوب a و b مختلف‌العلامه خواهند بود ؛ ثانیاً چون مجموع جبری دو عدد مختلف‌العلامه باید

(۸−) باشد، از اینجا استنباط می‌کنیم از دو عدد مطلوب ، آن‌که قدر مطلقش بیشتر است منفی است ؛ اکنون با توجه به این نکات ، حاصل‌ضرب دو عدد مطلوب یعنی (۱۲۸−) را تجزیه می‌کنیم ، صورتهای مختلف زیر حاصل می‌شود :

(۸و ۱۶−) ، (۴و ۳۲−) ، (۲و۶۴−) ، (۱و ۱۲۸−)

آزمایش نشان می‌دهدکه بین چهار جفت اعداد اخیر ، دوعددی که مجموع جبری آنها (۸−) باشد عبارتند از : (۸+ و ۱۶−) ؛ از اینجا اعداد مطلوب a و b (۸+ و ۱۶−) بدست می آیند و با توجه به رابطهٔ (E'') ، سه‌جمله‌ای مفروض به صورت زیر تجزیه می‌شود :

$$x^{۲}-۸x-۱۲۸=(x+۸)(x-۱۶)$$

مثال ۳ـ عبارت: $۲x^{۲}+۷x+۳$ را تجزیه‌کنید .

چون در سه‌جمله‌ای مفروض ، ضریب $x^{۲}$ برابر واحد نیست ، ابتدا ضریب $x^{۲}$ یعنی عدد ۲ را عامل مشترك قرار داده و سه‌جمله‌ای مفروض را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$(E_{۱})\quad ۲x^{۲}+۷x+۳=۲\left(x^{۲}+\frac{۷}{۲}x+\frac{۳}{۲}\right)$$

حال باید سه جمله‌ای : $x^{۲}+\frac{۷}{۲}x+\frac{۳}{۲}$ را به صورت دو عامل ضرب درآوریم و برای این‌منظور، مانند مثالهای ۱ و ۲ باید دو عدد جبری a و b را بقسمی تعیین‌کنیم‌که مجموعشان ($\frac{۷}{۲}$)وحاصل‌

ضربشان ($\frac{۳}{۲}$) باشد .

در اینجا به ملاحظهٔ اینکه ($\frac{۷}{۲}$ و $\frac{۳}{۲}$) ،مجموع وحاصل‌ضرب اعداد مطلوب a و b کسری هستند ، برای سهولت عمل و به منظور اینکه بااعدادکسری سر و کار نداشته باشیم، ابتدا دو برابر اعداد a و b را (در صورتی‌که وجود داشته باشند) پیدا کرده سپس حاصلها را نصف می‌کنیم تاخود اعداد a و b بدست آیند .

ضمن انجام این عمل باید متذکر بود که هرگاه اعداد مجهول a و b را دو برابر کنیم ، مجموعشان ($\frac{۷}{۲}$)نیزدوبرابر می‌شوداماحاصل‌ضرب آنها یعنی ($\frac{۳}{۲}$) چهار برابر خواهد شد و با این تدبیر، تعیین اعداد a و bکه مجموع و حاصل ضربشان‌کسری است، به‌تعیین دوعدد a' و b'که مجموعشان عدد صحیح ۷ و حاصل ضربشان عدد صحیح ۶ باشد منجر می‌شود .

برای بدست آوردن اعداد a' و b' نیز ابتدا توجه می‌کنیم که اولا چون حاصل ضرب این دو عدد (یعنی ۶) مثبت است ، اعداد a' و b' متحدالعلامه‌اند،ثانیاً چون مجموع جبری دوعددمتحدالعلامه (که در این مثال عدد ۷+ است) با خود آن‌اعداد متحدالعلامه‌است، دوعدد a' و b' هردو مثبت خواهند بود .

اکنون، باتوجه‌به‌مطالب‌بالا ، حاصل‌ضرب دوعدد a' و b' یعنی

۶ را تجزیه می‌کنیم ، دوصورت مختلف زیر حاصل می‌شود :

(+۳ و +۲) ، (+۶ و +۱)

با اندك دقت در دو جفت اعداد اخیر ، واضح می‌شود دو عددی که مجموعشان ۷ باشد، اعداد (+۶ و +۱) هستند.

بنابراین اعداد a' و b' برابر (+۶ و +۱) بوده و اعداد مطلوب a و b ،که باید نصف a' و b' باشند،برابر (+۳ و $+\frac{1}{2}$) خواهند بود .

حال با استفاده از تساوی (E'' شمارهٔ ۳۰) و با توجه به رابطهٔ (E_1 همین‌مثال)، سه‌جمله‌ای مفروض به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$2x^2+7x+3=2(x^2+\frac{7}{2}x+\frac{3}{2})$$

$$=2(x+\frac{1}{2})(x+3)$$

$$=(2x+1)(x+3)$$

۳۱ - تجزیهٔ مجموع یا تفاضل دومکعب - می‌دانیم :

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \qquad (N)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad (N')$$

یعنی عبارتهای : a^3+b^3 و a^3-b^3 را می‌توان بترتیب به صورتهای $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ و $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ تجزیه‌کرد ؛ با بیان دیگر ، تساویهای (N) و (N') چنین معنی می‌دهند :

مجموع یا تفاضل دومکعب مساوی است با :

(مجذور کعب‌دومی + حاصل‌ضرب دو کعب ∓ مجذور کعب اولی)(کعب‌دومی ± کعب‌اولی)

تبصره - برای گرفتن کعب از یك جمله ،کعب ضریب عددی آن‌جمله را می‌گیریم و توانهای حروف آن جمله را بر عدد ۳ تقسیم می‌کنیم .

مثال :

الف : $x^3-1=x^3-1^3=(x-1)(x^2+x+1)$

ب :

$$8x^3+27y^3=(2x)^3+(3y)^3=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$$

ج :

$$125x^6+64y^{12}=(5x^2)^3+(4y^4)^3$$
$$=(5x^2+4y^4)(25x^4-20x^2y^4+16y^8)$$

د :

$$a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$$

موارد استعمال تجزیه

الف - ساده‌کردن کسرها :

۳۲- برای ساده کردن یك کسر ابتدا ، به شرط امکان ، صورت و مخرج کسر را به هرطریق که میسر باشد ، به حاصل ضرب

عوامل تجزیه می‌کنند ، سپس با حذف عوامل مشترك از صورت و مخرج ، کسر دیگری معادل کسر اصلی و ساده‌تر از آن بدست می‌آورند .

ذیلا به عنوان مثال ، طرز ساده‌کردن سه‌کسر مختلف را باانجام عملیات مناسب نشان می‌دهیم :

I-
$$\frac{4ax+8ay}{3bx+6by}=\frac{4a(x+2y)}{3b(x+2y)}=\frac{4a}{3b}$$

II-
$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-6}=\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+2)}=\frac{x-2}{x+2}$$

III-
$$\frac{a^2x^2+b^2x^2-4a^2-4b^2+2abx^2-8ab}{a^2x^2-b^2x^2+4a^2-4b^2+4a^2x-4b^2x}=$$
$$\frac{x^2(a^2+b^2+2ab)-4(a^2+b^2+2ab)}{a^2(x^2+4+4x)-b^2(x^2+4+4x)}=$$
$$\frac{x^2(a+b)^2-4(a+b)^2}{a^2(x+2)^2-b^2(x+2)^2}=\frac{(a+b)^2(x^2-4)}{(x+2)^2(a^2-b^2)}=$$
$$\frac{(a+b)^2(x+2)(x-2)}{(x+2)^2(a+b)(a-b)}=\frac{(a+b)(x-2)}{(a-b)(x+2)}$$

ب- تعیین‌مخرج مشترك بین چندکسر یا تحویل چندکسر به یك مخرج :

۳۳ - برای تعیین کوچکترین مخرج مشترك بین چندکسر ، پس از تبدیل آنها به کسرهای غیرممکن‌التحویل ، ابتدا در صورت امکان ، مخرجهای‌کسور غیر ممکن‌التحویل را به‌حاصل ضرب عوامل تجزیه می‌کنند ؛ بعد از انجام این عمل ، با مطالعه در مخرجهای

کسرها، اولا ضرایب مخرجهای کسرها رامشخص می‌کنند؛ ثانیاً حروف یا پرانتزهایی‌راکه به شکل عامل ضرب در تمام مخرجها وجود دارند، و آنها را **عوامل مشترك مخرجها می‌نامند،** تعیین می کنند ؛ ثالثاً حروف یا پرانتزهایی را که به شکل عامل ضرب در بعضی مخرجها موجود و بعضی مخرجها فاقد آنها هستند ، مشخص کرده این قبیل عاملها را عوامل **نیمه مشترك** می خوانند ؛ رابعاً اگر مخرجهای کسرها دارای عواملی‌غیرمشترك، به‌صورت حرفی یا به صورت پرانتز، نیزباشند، آنها راهم‌معین می‌کنند .

وقتی‌که **ضرایب وعوامل مشترك ونیمه مشترك وغیر مشترك مخرجها** مشخص شدند، کوچکترین مخرج‌مشترك‌کسرها را به‌ترتیب زیر تعیین می‌کنند:

I ـ کوچکترین مضرب مشترك ضرایب مخرجهای کسرها را می‌گیرند ، عددی که به این‌ترتیب حاصل می‌شود ، ضریب کوچکترین مخرج مشترك کسرها خواهدبود .

II ـ از عوامل مشترك و نیمه مشترك ، دو عاملی را که بین‌اشباه خود ، توانی بیشتر ازهمه دارند اختیار می‌کنند؛ حاصل ضرب‌عواملی که به‌این ترتیب اختیار شده‌اند، کوچکترین مضرب مشترك بین‌عوامل مشترك ونیمه مشترك مخرجها خواهد بود .

III ــ حاصل ضرب عوامل غیر مشترك مخرجها را نیز، که کوچکترین مضرب مشترك همین عوامل خواهد بود، تعیین می‌کنند.

همینکه عملیات بالا انجام شد :

حاصل ضرب نتایجی که ازقسمتهای (I و II و III)بدست آمده‌اند، کوچکترین مخرج مشترك کسرهای موردنظر خواهد بود.

مثالــ بین کسرهای زیر کوچکترین مخرج مشترك تعیین کنید:

$\frac{7}{120a^3x^2y}$ و $\frac{5}{72ab^3x}$ و $\frac{1}{48a^2b}$

بین اعداد ۱۲۰ و ۷۲ و ۴۸ کوچکترین مضرب مشترك ، ۷۲۰ است . بین حروف مشترك a ، کوچکترین مضرب مشترك، a^3 است . بین حروف نیمه مشترك b و x ، کوچکترین مضرب مشترك،بترتیب b^3 و x^2 است و y هم حرف غیر مشترك است ؛ پس کوچکترین مخرج مشترك کسرهای بالا $720a^3b^3x^2y$ می‌باشد .

ج - حل معادلات به‌کمك تجزیه :

۳۴ ــ می‌دانیم وقتی‌که حاصل ضرب چند عامل برابر صفرباشد، لااقل یکی از آن عوامل صفرخواهد بود .

با استفاده از این خاصیت ، چنانچه بتوان معادله‌ای را پس از نقل تمام جمله‌هایش به طرف اول تساوی ، به حاصل ضرب عوامل تجزیه کرد ،چون دراین وضع ، حاصل ضرب چند عامل صفرمی‌شود، می‌توان هر یك از آن عاملها راجداگانه مساوی صفر قرار داد وجواب

(یا جوابهای) معادلات حاصل از تجزیه را، که همان جوابهای معادلهٔ اصلی هستند، بدست آورد .

مثال ۱ــ مطلوب‌است حل معادلهٔ: $x^2-5x=-6$

حل :

$$x^2-5x+6=0$$
$$(x-2)(x-3)=0$$
$$x-2=0 \qquad \boxed{x=2}$$
$$x-3=0 \qquad \boxed{x=3}$$

مثال ۲ ــ معادلهٔ: $x^2-6x+9=0$ را حل‌کنید .

حل :

$$(x-3)^2=0$$
$$(x-3)(x-3)=0$$
$$x-3=0 \qquad \boxed{x=3}$$

مثال ۳ ــ معادلهٔ: $x^3-16x=0$ راحل کنید .

حل :

$$x(x^2-16)=0$$
$$(x-4)(x+4)x=0$$
$$x-4=0 \qquad \boxed{x=4}$$
$$x+4=0 \qquad \boxed{x=-4}$$
$$x=0 \qquad \boxed{x=0}$$

جمع ، تفریق ، ضرب و تقسیم کسرها

۳۵ - جمع و تفریق کسرها - در جمع یا تفریق چند کسر ، ابتدا هر یك ازکسرها را به ساده‌ترین صورت ممکن تبدیل می کنند ، سپس چنانچه مخرجها متساوی باشند ، جمع یا تفریق جبری را دربارهٔ صورتها انجام داده حاصل را صورت کسری قرار می‌دهند که مخرجش همان مخرج مشترك کسور اصلی باشد ؛ کسری که به این ترتیب بدست می‌آید حاصل جمع یا حاصل تفریق کسرهای مفروض خواهد بود .

هرگاه مخرجهای کسرهایی که می‌خواهیم جمع یا تفریق کنیم متساوی نباشند ، ابتدا طبق قاعده‌ای که ضمن شمارهٔ ۳۳ گفته شد ، کوچکترین مخرج مشترك کسرها را معین می‌کنیم و بعد از آن به‌جای کسور اصلی ، کسرهایی متحدالمخرج و معادل با کسرهای مفروض به ترتیب زیر تعیین می‌کنیم :

کوچکترین مخرج مشترك را بر مخرج هر یك از کسرهای مفروض تقسیم کرده خارج قسمت تقسیم را در صورت همان کسرضرب می‌کنیم و حاصل این ضرب راصورت کسری قرار می‌دهیم که مخرجش همان کوچکترین مخرج مشترك باشد؛ هریك ازکسرهایی‌که طبق این قاعده بدست می آیند ، بایکی ازکسرهای مفروض معادل بوده و درعین

حال همگی متحدالمخرجند .

بنابراین، باتوجه‌به‌قاعدهٔ مذکور درمقدمهٔ شمارهٔ ۳۵، کافی‌است به‌جای کسرهای‌اصلی،کسور متحدالمخرج تعیین شده‌را اختیار کرده و عمل جمع یا تفریق را در بارهٔ آنها انجام دهیم.

مثال ۱ - حاصل عبارت زیررا معین کنید :

$$\frac{a-۱}{a+۱}+\frac{۳a}{a+۱}-\frac{۲a-۳}{a+۱}$$

حل :

$$\frac{a-۱}{a+۱}+\frac{۳a}{a+۱}-\frac{۲a-۳}{a+۱}=\frac{a-۱+۳a-۲a+۳}{a+۱}$$
$$=\frac{۲a+۲}{a+۱}=\frac{۲(a+۱)}{a+۱}=۲$$

مثال ۲ - حاصل عبارت زیررا معین‌کنید :

$$\frac{x+۱}{x-۱}+\frac{۲}{x^{۲}-۱}-\frac{x-۱}{۲x+۲}$$

حل :

$$\frac{x+۱}{x-۱}+\frac{۲}{(x-۱)(x+۱)}-\frac{x-۱}{۲(x+۱)}$$
$$=\frac{۲(x+۱)^{۲}+۴-(x-۱)^{۲}}{۲(x-۱)(x+۱)}$$
$$=\frac{x^{۲}+۶x+۵}{۲(x-۱)(x+۱)}$$
$$=\frac{(x+۱)(x+۵)}{۲(x-۱)(x+۱)}$$
$$=\frac{x+۵}{۲(x-۱)}$$

۳۶ - **ضرب کسرها** - درضرب چندکسر، حاصل‌ضرب‌صورتهای عوامل ضرب را صورت یك‌کسرقرار می‌دهیم که مخرجش حاصل‌ضرب مخرجهای‌عوامل ضرب‌باشد؛کسری‌که به‌این‌ترتیب‌بدست می آیدحاصل ضرب‌کسرهای مفروض خواهدبود.

واضح است‌که اگردر صورت ومخرج کسرحاصل ضرب، عوامل مشترکی وجود داشته باشد، باحذف عوامل مشترك، کسر حاصل ضرب رامی‌توان ساده‌کرد.

مثال :

$$\frac{۱۲۵a^۳-۲۷}{۲۵a^۲-۹}\times\frac{۵a+۳}{۲۵a^۲-۳۰a+۹}=\frac{(۱۲۵a^۳-۲۷)(۵a+۳)}{(۲۵a^۲-۹)(۲۵a^۲-۳۰a+۹)}=\frac{(۵a-۳)(۲۵a^۲+۱۵a+۹)(۵a+۳)}{(۵a-۳)(۵a+۳)(۵a-۳)^۲}=\frac{۲۵a^۲+۱۵a+۹}{(۵a-۳)^۲}$$

۳۷ - **تقسیم کسرها** - خارج قسمت تقسیم دوکسر به‌این‌ترتیب بدست می آید که‌کسر مقسوم را در عکس کسر مقسوم علیه ضرب کرده حاصل راساده کنیم.

مثال :

$$\frac{a^۲-b^۲}{a}:\frac{a+b}{۳ab}=\frac{a^۲-b^۲}{a}\times\frac{۳ab}{a+b}=\frac{۳ab(a-b)(a+b)}{a(a+b)}=۳b(a-b)$$

تقسیم یك چندجمله‌ای صحیح از x بریك دوجمله‌ای به صورت x − a

۳۸ - باتوجه به شمارهٔ ۱۱ و تبصرهٔ ذیل آن ، می‌دانیم : چند-

جمله‌ایهایی مانند :

$$۵x^۴-۸x^۳+۳x^۲+۱۰x-۱$$

و $$۳+۹x-۶x^۲+۵x^۳-۲x^۴+۸x^۵$$

راکه شامل جمیع قوای نزولی یا صعودی از حرفی مانند x هستند ، چند جمله‌ای **کامل** ازحرف x می‌نامند؛ وچندجمله‌ایهایی مانند :

$$۳x^۴-۲x^۳+۵x^۲-۱$$

و $$۷+۴x^۲-۳x^۴+۲x^۵$$

که فاقد بعضی‌ازقوای حرف x باشند، چندجمله‌ایهای **ناقص** از حرف x نامیده می‌شوند.

ضمناً هر کثیرالجملهٔ ناقص را با افزودن جمله‌های مناسب که ضرایب آنها صفر باشد ، می‌توان به صورت کثیرالجملهٔ کامل درآورد.

برای اختصار ، کثیرالجمله‌هایی که شامل حرف x باشند ، به علامت $f(x)$ (اف x) یا $p(x)$ (پ x) نمایش می‌دهند ، مانند :

$$f(x)=x^۳-۳x^۲+۱$$

چنانچه درکثیرالجمله ، به جای x عدد مشخص a راقراردهیم، حاصل را $f(a)$ یا $p(a)$ می‌نامند ؛ مثلا مقدار کثیرالجملهٔ اخیر، به‌ازای $x=۲$ چنین می‌شود: $f(۲)=-۳$

هرگاه $f(\alpha)=۰$ شود، عدد α ریشهٔ کثیرالجمله نامیده‌می‌شود.

۳۹ - قضیه - باقیماندهٔ تقسیم هر کثیرالجملهٔ صحیح از x بر دوجمله‌ای $x-a$، مساوی است بامقدار آن‌کثیرالجمله به‌ازای $x=a$.

اثبات ـ درحساب خوانده‌ایم که درعمل تقسیم، هرگاه به‌حاصل ضرب مقسوم علیه درخارج‌قسمت، باقیماندهٔ تقسیم‌را اضافه‌کنیم،حاصل مساوی مقسوم می‌شود؛ باتوجه به‌این‌خاصیت چنانچه‌کثیرالجملهٔ مقسوم را $f(x)$ و خارج‌قسمت تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ را $Q(x)$ و باقیماندهٔ این تقسیم‌را R فرض‌کنیم، چنین خواهیم داشت :

$$f(x)\equiv(x-a)\cdot Q(x)+R \qquad (I)$$

واضح‌استچون مقسوم‌علیه از درجهٔ اول است، R مقداری‌ثابت و مستقل از x می‌باشد و چون رابطهٔ (I) به ازای جمیع مقادیر x محقق است، باید حاصل دوطرف رابطهٔ (I) به‌ازای $x=a$ هم متساوی باشند، یعنی :

$$f(a)=(a-a)\cdot Q(a)+R$$

یا :

$$f(a)=\text{۰}\times Q(a)+R$$

وپس از اختصار :

$$(II) \quad f(a)=R$$

وبرقراری رابطهٔ (II)،صحت حکم‌قضیه را محقق می‌سازد .

نتیجهٔ ۱ ـ شرط لازم وکافی برای آنکه‌کثیرالجملهٔ صحیحی از x بر $(x-a)$ قابل قسمت باشد، این است‌که به ازای $x=a$ ،حاصل کثیرالجمله صفرشود، یعنی‌داشته باشیم :

$$R=f(a)=\text{۰}$$

مثالـ باقیماندهٔ تقسیم کثیرالجملهٔ : $\text{۵}x^{\text{۴}}-\text{۳}x^{\text{۲}}+\text{۲}x-\text{۴}$ را بر $(x-\text{۲})$ پیداکنید .

حل :

$$R=f(\text{۲})=\text{۵}\times\text{۲}^{\text{۴}}-\text{۳}\times\text{۲}^{\text{۲}}+\text{۲}\times\text{۲}-\text{۴}$$

وپس از اختصار :

$$R=f(\text{۲})=\text{۶۸}$$

نتیجهٔ ۲ ـ شرط لازم وکافی برای آنکه کثیرالجملهٔ صحیحی‌از x بر $x+a$ قابل قسمت باشد،این است‌که به ازای $x=-a$ ، حاصل کثیرالجمله صفر شود . در حقیقت می‌توان مقسوم‌علیه را به صورت : $x-(-a)$ نوشت وطبق قضیهٔ قبل،باقیمانده راحساب کرد.

مثال ـ باقیماندهٔ تقسیم کثیرالجملهٔ : $\text{۵}x^{\text{۴}}-\text{۳}x^{\text{۲}}+\text{۲}x-\text{۴}$ را بر $x+\text{۲}$ بدست آورید .

حل :

$$R=f(-\text{۲})=\text{۵}(-\text{۲})^{\text{۴}}-\text{۳}(-\text{۲})^{\text{۲}}+\text{۲}(-\text{۲})-\text{۴}$$
$$R=f(-\text{۲})=\text{۶۰}$$

۴۰ ـ قاعدهٔ نوشتن خارج‌قسمت تقسیم یک‌کثیرالجملهٔ کامل از x بر $x-a$.

بدواً یادآور می‌شویم که اولا a ریشهٔ معادلهٔ : $x-a=\text{۰}$ یعنی ریشهٔ مقسوم علیه‌است؛ ثانیاً هرکثیرالجملهٔ کامل‌از x که نسبت به‌حرف x از درجهٔ (n اُم)[1] باشد، شامل $(n+\text{۱})$ جمله است و اگر آن را بر دوجمله‌ای درجهٔ اولی مانند : $x-a$ تقسیم کنیم، خارج‌قسمت‌این تقسیم ، کثیرالجملهٔ کاملی از x و درجهٔ آن نسبت به حرف x برابر $(n-\text{۱})$ بوده ودر نتیجه شامل n جمله خواهد بود.

---

۱ ـ n عدد صحیح ومثبت.

مثلا اگر بخواهیم کثیرالجملهٔ کامل :

$$A_0x^3+A_1x^2+A_2x+A_3$$

را که نسبت به حرف x از درجهٔ سوم و شامل چهار جمله است ، بر دوجمله‌ای $x-a$ تقسیم‌کنیم، قبل‌از انجام عمل‌تقسیم، پیش‌بینی‌می‌کنیم که خارج قسمت این تقسیم، نسبت به حرف x از درجهٔ دوم و شامل سه جمله خواهد بود .

حال به عنوان نمونه، عمل همین تقسیم را به صورت زیر انجام می‌دهیم :

$A_0x^2+A_1x^2+A_2x+A_3$	$x-a$
$-A_0x^3+A_0ax^2$	A_0x^2+
باقیماندهٔ اول $(A_0a+A_1)x^2+A_2x+A_3$	$(A_0a+A_1)x+$
$-(A_0a+A_1)x^2+(A_0a^2+A_1a)x$	$(A_0a^2+A_1a+A_2)$
باقیماندهٔ دوم $(A_0a^2+A_1a+A_2)x+A_3$	
$-(A_0a^2+A_1a+A_2)x+$	
$(A_0a^3+A_1a^2+A_2a)$	
آخرین باقیمانده $A_0a^3+A_1a^2+A_2a+A_3$	

با اندك دقت در عبارت خارج قسمت، واضح می‌شودکه ضرایب جمله‌های مختلف خارج قسمت را، بدون انجام عمل تقسیم ، طبق این قاعده می‌توان بدست آورد :

قاعده :

ضریب هرجمله ازخارج قسمت بدست می‌آید اگر، ضریب جملهٔ قبلی‌از خارج قسمت‌رادر a (ریشهٔ مقسوم‌علیه) ضرب‌کرده و به حاصل ضرب، ضریب«جملهٔ همردیف همان‌جمله ازمقسوم» رابیفزاییم.

مثلا : (A_0a+A_1) ، ضریب جملهٔ دوم از خارج قسمت ، به این ترتیب حاصل می‌شود که A_0 ، ضریب جملهٔ اول خارج قسمت را در a ضرب کرده وحاصل ضرب A_0a را با عدد A_1 یعنی ضریب جملهٔ دوم مقسوم جمع‌کنیم .

ضمناً باقیماندهٔ تقسیم‌مذکور یعنی: $A_0a^3+A_1a^2+A_2a+A_3$ عیناً همان عبارت مقسوم است که در آن ، حرف a جانشین حرف x شده است .

مثال ــ بدون انجام عمل تقسیم، خارج قسمت وباقیماندهٔ تقسیم زیر را معین کنید :

$$(x^5-4x^4+x^3-2x^2+x+30) : (x-2)$$

حل:

ابتدا R ، باقیماندهٔ تقسیم، راحساب می‌کنیم :

$$R=f(2)=2^5-4\times2^4+2^3-2\times2^2+2+30=0$$

پس باقیماندهٔ تقسیم صفراست .

برای‌تعیین‌خارج قسمت، بدواً ملاحظه می‌کنیم‌که جملهٔ اول‌آن: $\frac{x^5}{x}=x^4$ بسهولت بدست می‌آید . برای نوشتن ضریب جملهٔ دوم،

باید ضریب جملهٔ اول یعنی ضریب x^4 را که برابر واحد است، در عدد a، (ریشهٔ مقسوم علیه)، که در این مثال برابر ۲ است ضرب کنیم و حاصل ضرب ۲×۱ یعنی ۲ را با ضریب جملهٔ دوم مقسوم یعنی (۴−) جمع کنیم؛ نتیجهٔ این عمل که (۲−) می شود، ضریب جملهٔ دوم خارج قسمت است؛ پس‌جملهٔ دوم خارج قسمت، $-2x^3$ است.

چون طبق همین قاعده، ضریب جملهٔ دوم یعنی (۲−) را در عدد ۲، ریشهٔ مقسوم علیه، ضرب کرده و حاصل را با ۱+، ضریب ($+x^3$) جملهٔ سوم‌مقسوم، جمع کنیم، ضریب جملهٔ سوم خارج قسمت چنین می‌شود:

$$2(-2)+1=-3$$

پس جملهٔ سوم خارج قسمت، $-3x^2$ است.

اگر عمل را به همین ترتیب ادامه دهیم مقدار $Q(x)$، خارج‌قسمت‌مطلوب، به صورت زیر بدست می آید:

$$Q(x)=x^4-2x^3-3x^2-8x-15$$

تبصره ـ چنانچه کثیرالجملهٔ مقسوم کامل نباشد، همان طور که ضمن شمارهٔ ۳۸ نیز متذکر شدیم، می‌توان باافزودن جمله‌هایی‌که ضریبهای آنها صفر باشد،کثیرالجمله راکامل‌کرد.

مثال ـ خارج قسمت وباقیماندهٔ تقسیم زیر را بدون انجام عمل تقسیم معین کنید:

$$(2x^4-3x^2+5):(x+3)$$

حل:

$$(2x^4+0x^3-3x^2+0x+5):(x+3)$$

$$R=f(-3)=2(-3)^4-3(-3)^2+5=140$$

باقیماندهٔ تقسیم، با مقسوم اولیه یا با مقسومی که کامل شده، می‌شود $R=140$.

جملهٔ اول‌خارج قسمت $2x^3$ است. جملهٔ دوم‌خواهدشد $-6x^2$، زیرا:

$$(-3)(+2)+0=-6$$

جملهٔ سوم می‌شود $15x$، زیرا:

$$(-3)(-6)+(-3)=+15$$

به همین ترتیب جملهٔ آخرخارج قسمت، برابر (۴۵−) می‌شود و $Q(x)$ خارج قسمت کامل، به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$Q(x)=2x^3-6x^2+15x-45$$

۴۱ـ خارج‌قسمت وباقیماندهٔ $\frac{x^m-a^m}{x-a}$ را بدون انجام عمل تقسیم تعیین کنید:

$$R=f(a)=a^m-a^m=0$$

$$Q(x)=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\dots\dots+a^{m-2}x+a^{m-1}$$

۴۲ ـ خارج‌قسمت وباقیماندهٔ $\frac{x^m+a^m}{x-a}$ را بدون انجام عمل تقسیم معین کنید:

$$R=f(a)=a^m+a^m=2a^m$$

$$Q(x)=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\dots+a^{m-1}$$

۴۳ـ خارج قسمت و باقیماندهٔ $\frac{x^m-a^m}{x+a}$ را بدون انجام عمل تقسیم پیدا کنید :

$$R=f(-a)=(-a)^m-a^m$$

در صورتی که m زوج باشد : $R=0$.

در صورتی که m فرد باشد: $R=-2a^m$.

ومقدار $Q(x)$ ، برحسب آنکه m زوج یافردباشد،چنین‌است:

$$Q(x)=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\dots\pm a^{m-2}x\mp a^{m-1}$$

۴۴ـ خارج قسمت وباقیماندهٔ $\frac{x^m+a^m}{x+a}$ را بدون انجام عمل تقسیم پیدا کنید :

$$R=f(-a)=(-a)^m+a^m$$

در صورتی‌که m فرد باشد : $R=0$.

در صورتی که m زوج باشد : $R=2a^m$.

وخارج قسمت رامانند شمارهٔ ۴۳ پیداکنید .

از آنچه‌گفته شد نتیجه می‌گیریم :

I ـ دوجمله‌ای x^m-a^m بر $x-a$ همواره قابل قسمت است .

II ـ دوجمله‌ای x^m+a^m بر $x-a$ هیچوقت‌قابل قسمت نیست .

III ـ دوجمله‌ای x^m-a^m بر $x+a$ وقتی‌قابل قسمت است که m زوج باشد .

IV ـ دوجمله‌ای x^m+a^m بر $x+a$ وقتی‌قابل‌قسمت‌است که m فردباشد .

تمرین

کدامیك ازعبارات زیر اصم یا منطقند ؟

۱ـ $3a-2\sqrt{b}$

۲ـ $\frac{x}{x+1}$

۳ـ $\sqrt{x}+2$

۴ـ $(x+1)\sqrt{x^2}$

۵ـ $x-\frac{1}{x+1}$

۶ـ $\sqrt{x^2+1}$

۷ـ $\sqrt{ax}+1$

۸ـ $2x\sqrt{y+1}+xy$

۹ـ $\sqrt{x}+y$

۱۰ـ $x\sqrt{2}-y$

۱۱ـ $\frac{\sqrt{a}-2}{b+1}$

۱۲ـ $4x\sqrt{3}+ax^2\sqrt{2}$

درجهٔ عبارتهای زیر را اولا ـ نسبت به حرف x ، ثانیاً ـ نسبت به حرف y معین کنید . هریك‌از عبارات رابرحسب قوای صعودی x وهمچنین برحسب قوای صعودی y مرتب کنید . تعیین‌کنید ، کدامیك از عبارات زیر برحسب x کامل‌می‌باشد .

۱۳ـ $8x^5-3x^2y+1+5y^2-7xy^3$

۱۴ـ $4x^3-7x^2y+5y^3+2-2xy^2-4y^4$

۱۵ـ $x^3y-xy^2+x^2-y^2$

۱۶ـ $3x^2+xy+4y^2$

۱۷- $x^۶ + x^۵y = x^۲y^۴ + ۲x^۲y^۲ - x^۴y^۲ + x + ۱$

حاصل عبارتهای زیر را تعیین کنید :

۱۸- $۷a^۲ - ۴b^۲ + ۵c^۲ = (a^۲ - ۹b^۲ - ۱۱c^۲)$

۱۹- $۴x - (۲x - ۵) + ۳ + (x - ۷)$

۲۰- $-\frac{۱}{۲}a^۲x + \frac{۱}{۴}a^۲x - \frac{۲}{۳}x^۲ + \frac{۱}{۳}a^۲x + x^۲$

۲۱- $ax^۳ + bx^۲ + cx + d - ۲۲a^۲x - \frac{۲}{۳}bx^۲ - ۲d$

۲۲- $۹c - [-۴ - (۷c - ۵)]$

۲۳- $x - [(y - x) - (y - ۱)]$

۲۴- $(a + b - c) - [-(b - ۳c + a)]$

۲۵- $-۵a^۲ - ۲ax + x^۲ - [۴a^۲ + ۵ax - (۳a^۲ - ۸ax)]$

۲۶- $c + [-d - (۳ + ۳c) + ۲] - [۵ - (-c + ۲d)]$

۲۷- $۳m - [-۴x - (۵m + n)] - [m - (۲m - ۳n) - ۵x]$

۲۸- $-\{-۴ - [-۵ - ۲(۱ - a) - a] - (۳ - a)\}$

۲۹- $a^۲ + \frac{ab}{۴} + b^۲ - \frac{a^۲}{۴} + ab + \frac{b^۲}{۲} - \frac{b^۲}{۴}$

۳۰- $(۳x^m + ۸x^{m-۱} + ۹x^{m-۲} - ۲) + (۲x^m + ۸x^{m-۱} + ۷x^{m-۲} - ۱) - (x^{m-۴} + x^{m-۱})$

۳۱- $(a + b)x + (b + c)y - [(a + b)x - (b + c)y]$

حاصل توانهای زیررا بدست آورید :

۳۲- $(-۱۰)^۳$ ۳۳- $(-۳)^۲$

۳۴- $(-۸)^۴$ ۳۵- $-(-۳)^۲$

۳۶- $\left(-\frac{۲}{۷}\right)^۲$ ۳۷- $\left(\frac{۳}{۵}\right)^۳$

۳۸- $\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^۵$ ۳۹- $-\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳$

۴۰- ۴۳×۷^۲ ۴۱- $(-۶)^۳(-۵)^۳$

۴۲- $(۳^۲)^۲$ ۴۳- $(۴^۳)^۲$

۴۴- $۸^{۱۱} : ۸^۳$ ۴۵- $۷^۳ : ۷^۴$

۴۶- $۳^۵ \times ۳^۲$ ۴۷- $۲۴^۳ : ۱۸^۳$

۴۸- $a^۴ \times a$ ۴۹- $a^۲ \times a^۳ \times a^۴$

۵۰- $(x^۴y^۵)^۳$ ۵۱- $(۳a^۲b^۳)^۲$

۵۲- $(a + b)^۲(a + b)$ ۵۳- $(۲x - ۳y)^۳(۲x - ۳y)^۲$

حاصل عبارتهای زیررا بدست آورید :

۵۴- $۳a \times ۵b$ ۵۵- $۷a^۲ + ۸ab$

۵۶- $۴ab^۲ \times \frac{۱}{۲}a^۲b^۳$

۵۷- $\left(-\frac{۳}{۴}a^۲bc^۳\right)\left(\frac{۲}{۳}ab^۲c\right)$

۵۸- $\left(-\frac{۵}{۷}a^۲bxy^۲\right)\left(-\frac{۳}{۵}ax^۲y\right)$

۵۹- $\left(\frac{۳}{۴}a^۲bxy\right)^۲\left(-\frac{۳}{۴}a^۵b^۲y^۳\right)^۳$

۶۰- $۷a(۶a + ۲b - ۵c)$

۶۱- $-۹a^۲b(-۵a^۲ + ۲ab^۲ - ۸b^۳)$

۶۲- $(x - ۲)(x^۲ - ۳x - ۸)$

۶۳- $(a^2-1)(a^2+a^4+a^6)$

۶۴- $(a^m+2b^m-c^m)(2a^m-3b^m+c^m)$

۶۵- $(x^{K-1}+x)(x^{2K+1}+x^2)$

۶۶- $12a^4c^6 : 3a^2c$

۶۷- $(a^2b^2c^3 : a^3b^2c)^4$

۶۸- $[3b^5 \cdot b^2 \cdot c^4 : 4(-c)^3]^2$

۶۹- $(12a^3b^2-18a^2b^3) : 6a^2b^2$

۷۰- $(27x^3-27x^2+9x-1) : (3x-1)$

۷۱- $(x^4-1) : (x+1)$

۷۲- $(32x^5+1) : (2x+1)$

به‌کمك اتحادها، حاصل عبارتهای زیررا معین‌کنید :

۷۳- $(2x+3)^2$ ۷۴- $(3x^2+4)^2$

۷۵- $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ ۷۶- $\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{4}x\right)^2$

۷۷- $(x^5+1)^2$ ۷۸- $\left(2x^3-\frac{1}{2}\right)^2$

۷۹- $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ ۸۰- $\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2$

۸۱- $(2x-3)(2x+3)$ ۸۲- $(3x+4)(4-3x)$

۸۳- $(a-b+c)(a+b-c)$ ۸۴- $(a+4b-c)(a-4b+c)$

۸۵- $(x+y-2z)(x-y-2z)$

۸۶- $(1+2a+3b+4c)(1+2a-3b-4c)$

۸۷- $(x-5)(x-7)$ ۸۸- $(x+2a)(x-5a)$

۸۹- $(2ab+cd)(cd-3ab)$

۹۰- $[(a+b)+(c-d)][(a+b)-(c-d)]$

۹۱- $(4-x^2+3x)^2$ ۹۲- $(x^2-2x+2)^2$

۹۳- $(x^3-x^2+x-1)^2$ ۹۴- $(4x^2+2x+1)(2x-1)^2$

۹۵- $(3x-4)^3$ ۹۶- $(x^2+1)^3$

۹۷- $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}\right)^3$ ۹۸- $\left(3xy-\frac{1}{x}\right)^2$

۹۹- $[2a(2a+x^2)+x^4][4a^2+x^4-2ax^2]$

به‌کمك بینم نیوتن عبارتهای زیر را بسطدهید :

۱۰۰- $(a-b)^3$ ۱۰۱- $(a+b)^3$

۱۰۲- $(a\pm b)^4$ ۱۰۳- $(a\pm b)^5$

۱۰۴- $(2x\pm 1)^5$ ۱۰۵- 1.01^4

۱۰۶- 0.98^5 ۱۰۷- 1.99^3

عبارتهای زیررا به صورت عوامل ضرب درآورید :

۱۰۸- $70a^3b^2-35a^2b^4+21ab^5$

۱۰۹- $25a^2+30a^3-35a^6$ ۱۱۰- $6a^2x^3-3ax^4+21a^2x^5$

۱۱۱- $2a^3b^2c^4d-3ab^4c^3+7a^2b^2c^4d^2$

۱۱۲- $18a^2b^3-30a^3b^2+18ab^4-42a^4b$

۱۱۳- $-44ax^m-286a^2x^{m+1}-66a^3x^{m+2}$

۱۱۴- $x^{m+n}y^m-x^{2m}y^{m+n}-x^my^{2m}$

۱۱۵- a^2-9 ۱۱۶- $x^2-\frac{1}{4}$

۱۱۷- $4m^2-9x^2$ ۱۱۸- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

۱۱۹- $16x^2y^2-81a^2b^2c^2$ ۱۲۰- x^8-1

۱۲۱- $3ax^4-3ay^4$ ۱۲۲- $3a^5-48ab^8$

۱۲۳- $x^{5m}-9x^{3m}y^{4n}$ ۱۲۴- $a^2+4ab+4b^2$

-۱۲۵ $9a^2-12ab+4b^2$ -۱۲۶ $a^2+a+\frac{1}{4}$

-۱۲۷ $9x^2-3xy+\frac{y^2}{4}$ -۱۲۸ $\frac{x^2}{16}-\frac{3}{2}ax+9a^2$

-۱۲۹ $x^2+ax+ab+bx$ -۱۳۰ $x^2+(a-b)x-ab$

-۱۳۱ $8ax-bx+8ay-by$

-۱۳۲ $a^2\pm 2ab+b^2-c^2$ -۱۳۳ $x^2-b^2\pm 2bc-c^2$

-۱۳۴ x^2+2x-y^2+1 -۱۳۵ $m^4-x^2+2xp-p^2$

-۱۳۶ $4a^4+b^4$ -۱۳۷ $a^4+b^4+a^2b^2$

-۱۳۸ $a^2-b^2+x^2-y^2+2(ax-by)$

-۱۳۹ $a^2-c^2-2(ad-bc)-b^2+d^2$

-۱۴۰ $9a^3-12a^2p+4ap^2$

-۱۴۱ $a^5p^2+6a^3p+9a$ -۱۴۲ a^3-2a^2-3a

-۱۴۳ $3a^2x^3y+6a^2x^2y^2+3a^2xy^3-3a^2xyz^2$

-۱۴۴ $36a^2x^5y^3-24a^3x^4y^2z+4a^4x^3yz^2$

-۱۴۵ $4a^7x^5-24a^6x^6+36a^5x^7$

-۱۴۶ $(x-y)(x^2-z^2)-(x-y)(x^2-y^2)$

-۱۴۷ $(x-1)(x-2)(x-3)+(x-1)(x-2)-(x-1)$

-۱۴۸ $a^2-ab-b-1$ -۱۴۹ $a^4-a^3+a^2-a$

-۱۵۰ $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$

-۱۵۱ $4(ad+bc)^2-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2$

-۱۵۲ $2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$

درستی اتحادهای زیررا ثابت کنید :

-۱۵۳ $(x-a)(b-c)+(x-b)(c-a)+(x-c)(a-b)\equiv 0$

-۱۵۴ (اتحاد اولر)
$$(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b)+(a-b)(b-c)(c-a)\equiv 0$$

-۱۵۵
$$(x-a)^3(c-b)+(x-a)[(x-c)^3-(x-b)^3]+(x-b)(x-c)[(x-b)^2-(x-c)^2]-(b-c)(c-a)(a-b)(3x-a-b-c)\equiv 0$$

-۱۵۶ $(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)-(aa'+bb')^2\equiv(ab'-ba')^2$ (اتحاد لاگرانژ)

-۱۵۷
$$(a+b-c)^3+(a-b+c)^3+(b+c-a)^3+24abc\equiv(a+b+c)^3$$

کسرهای زیررا ساده کنید :

-۱۵۸ $\frac{-13acx^2}{4a^2c^2x}$ -۱۵۹ $\frac{24a^2bc^2}{18abd}$

-۱۶۰ $\frac{924a^7b^5c^4}{588a^5b^3c^4}$ -۱۶۱ $\frac{25a^4b^3c^2}{15a^2b^4c^3}$

-۱۶۲ $\frac{12x^2-2xy}{16x^2}$ -۱۶۳ $\frac{ax^3-a^4}{2am+3a}$

-۱۶۴ $\frac{42a^3-30a^2m}{35am^2-25m^3}$ -۱۶۵ $\frac{b+b^2}{a+ab}$

-۱۶۶ $\frac{14a^2-7ax}{10ay-5xy}$ -۱۶۷ $\frac{ax+x^2}{ab^2+b^2x}$

-۱۶۸ $\frac{12a^2x^4+2a^2x^5}{18ab^2x+3ab^2x^2}$ -۱۶۹ $\frac{b^3x^4-a^2b^3x^2}{a^2b^2x^2-a^3b^2x}$

-۱۷۰ $\frac{ac+bc+ad+bd}{a^2+ab}$ -۱۷۱ $\frac{35+5x+7y+xy}{5+y}$

-۱۷۲ $\frac{42a^2+51ab+15b^2}{6a+3b}$ -۱۷۳ $\frac{x^2-4ax+4a^2}{x^2-4a^2}$

-۱۷۴ $\dfrac{3ax^3+3a^3x-6a^2x^2}{ax^3-a^3x}$

-۱۷۵ $\dfrac{x^2-1}{(1+ax)^2-(x+a)^2}$

-۱۷۶ $\dfrac{(a^2+b^2-c^2)^2-(a^2-b^2+c^2)^2}{4ab^2+4abc}$

-۱۷۷ $\dfrac{x^5-ax^4-a^4x+a^5}{x^4-ax^3-a^2x^2+a^3x}$

-۱۷۸ $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2+c^2-b^2+2ac}$

-۱۷۹ $\dfrac{(a^8+2a^4x^2+x^4)(a^4-x^2)}{(a^2+x)(a^6-a^4x+a^2x^2-x^3)}$

-۱۸۰ $\dfrac{(x^2-1)(y^2-1)}{(xy+1)^2-(x+y)^2}$

-۱۸۱ $\dfrac{(x+y)^4-(x+y)^2}{(x+y)^4+(x+y)^3}$

-۱۸۲ $\dfrac{1-ax+a(a+x)}{(1-ax)^2+(a+x)^2}$

حاصل عبارتهای زیررا تعیین‌کنید :

-۱۸۳ $\dfrac{a^2-b^2}{a}\times\dfrac{3ab}{(a+b)^2}$

-۱۸۴ $\dfrac{x^3+a^3}{x^3-a^3}\times\dfrac{x-a}{x+a}\times\dfrac{x^2+ax+a^2}{x^2-ax+a^2}$

-۱۸۵ $\dfrac{a^2-2a-15}{6a^3}\times\dfrac{a^2+6a+8}{a^2+5a+6}\times\dfrac{a^2-3a-10}{3a^3-9a^2}$

-۱۸۶ $\dfrac{a^2-4ab}{a+3b}\times\dfrac{a^2-ab-12b^2}{a^2}$

-۱۸۷ $\dfrac{[(b-c)^2-a^2][b^2-(a+c)^2]}{(a^2-c^2+b^2+2ab)(c^2-b^2-a^2+2ab)}$

-۱۸۸ $\dfrac{(a^4-b^4)(a^4+a^2b^2+b^4)}{a^8-a^2b^6}$

-۱۸۹ $\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2} : \dfrac{x^2-2x-8}{x^2-3x-4}$

-۱۹۰ $\dfrac{x^3+1}{2-2x+2x^2} : \left[\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-4x+4}\times\dfrac{x^2-x-2}{(x+1)^3}\right]$

-۱۹۱ $\dfrac{a^2-b^2+c^2+2ac}{a^2-b^2+c^2-2ac} : \dfrac{a^2-c^2-b^2+2bc}{b^2-(a-c)^2}$

-۱۹۲ $\dfrac{(a-b)^2-c^2}{a^2+ab-bc-ac}\times\dfrac{ab^4c-b^4c^2}{a^3b^2c-a^2b^3c+a^2b^2c^2} : \dfrac{ab^3c+ab^2c^2-a^2b^2c}{a^4b+a^3b^2}$

حاصل هریك ازعبارتهای زیررا پیداکنید :

-۱۹۳ $5x+\dfrac{7x-4}{3x^2}$ -۱۹۴ $2x+\dfrac{3-2x}{5}$

-۱۹۵ $x-\dfrac{x}{x-1}$ -۱۹۶ $1+\dfrac{a-b}{a+b}$

-۱۹۷ $7x-\dfrac{2ax-x^2}{3a-x}$ -۱۹۸ $3b-\dfrac{ab+b^2}{2a}$

-۱۹۹ $a+b-\dfrac{a^2-b^2}{a+2b}$ -۲۰۰ $1-x+x^2-\dfrac{x^3}{1+x}$

۲۰۱- $1+\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$

۲۰۲- $\frac{4+x^2-2x}{2+x}-2-x$

۲۰۳- $\frac{3a}{4b}+\frac{5a}{6b}+\frac{2c}{3b}$

۲۰۴- $\frac{7b}{3a}-\frac{11ab}{12c}+\frac{5ac}{18b}$

۲۰۵- $\frac{a-b}{ab}+\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}$

۲۰۶- $\frac{x-a}{x+a}-\frac{ax}{x^2-a^2}+\frac{3ax-x^2-a^2}{x^2-a^2}$

۲۰۷- $\frac{a^2}{a+b}+\frac{ab}{a-b}+\frac{3a^3-ab^2}{a^2-b^2}$

۲۰۸- $\frac{ax}{a+x}+\frac{2a^2x^2}{a^2+x^2-ax}-\frac{ax(2a^2+x^2)}{x^3+a^3}$

۲۰۹- $\frac{4}{x+3}+\frac{3}{x-3}$

۲۱۰- $\frac{y+8}{y^2+y-2}+\frac{y-2}{y^2+2y}$

۲۱۱- $\frac{2x^2-x+2}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}$

۲۱۲- $3x-2y+\frac{2x+3y}{2-3x}-\frac{3+3y}{5(1+x)}-\frac{3x+2y+5xy}{2-x-3x^2}$

۲۱۳- $\frac{x^2y^2}{a^2b^2}+\frac{(x^2-a^2)(y^2-a^2)}{a^2(a^2-b^2)}+\frac{(x^2-b^2)(y^2-b^2)}{b^2(b^2-a^2)}$

۲۱۴- $\frac{(a+b)^3-c^3}{a+b-c}+\frac{(b+c)^3-a^3}{b+c-a}+\frac{(c+a)^3-b^3}{c+a-b}$

۲۱۵- $\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{x^2-3x+2}-\frac{2}{x^2-x-2}-\frac{1}{x^3-2x^2-x+2}$

۲۱۶- $\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

۲۱۷- $\frac{(x+b)(x+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x+c)(x+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x+a)(x+b)}{(c-a)(c-b)}$

۲۱۸- $\frac{(x-a)^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-b)^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-c)^3}{(c-a)(c-b)}$

۲۱۹- $\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2)+\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)$

۲۲۰- $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}$

۲۲۱- $\frac{bc}{(a-c)(a-b)}+\frac{ac}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}$

۲۲۲- $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$

۲۲۳- به فرض آنکه $x=\frac{(a+b)^2}{a-b}$ باشد حاصل عبارت زیر را بدست آورید :

$$\frac{a-b}{ab}x^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)x+\frac{(a+b)(a^2-b^2)}{2ab}$$

حاصل کسرهای مرکب زیررا معین کنید :

۲۲۴- $\dfrac{\frac{b}{a}+2}{2-\frac{b}{a}}$

۲۲۵- $\dfrac{\frac{a^2b^3}{c}}{\frac{a^3b^2}{c^2}}$

۲۲۶- $\dfrac{2+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}-\frac{3}{x}}$

۲۲۷- $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{a^2}{b^2}-1}$

۲۲۸- $\dfrac{\frac{1}{x-y}-\frac{2}{x+y}}{\frac{x^2-9y^2}{(x-y)^2}}$

۲۲۹- $\dfrac{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}-\frac{1}{b}}$

۲۳۰- $\dfrac{\frac{x^3+1}{1-x^2}}{\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\right)$

۲۳۱- $\dfrac{\frac{a-b}{a}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a+b}{b}-\frac{a}{a-b}} : \dfrac{1-\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}+1}$

۲۳۲- $\left(\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x}\right)x^2 : \left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)\left(1-\frac{1-x}{1+x}\right)$

۲۳۳- اگر $a+b+c=0$ باشد ثابت کنید :

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9$$

۲۳۴- اگر $a^2=b^2+c^2$ باشد حاصل عبارت زیررا پیدا کنید :

$a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$

باقیماندهٔ هریك ازتقسیمهای زیررا معین کنید :

۲۳۵- $(3a^3+5a^2-6a) : (a-1)$

۲۳۶- $(x^4-8x-9) : (x-2)$

۲۳۷- $(2x^4+16x^3-68x+1) : \left(x+\frac{1}{2}\right)$

۲۳۸- $(3x^5+2x^4-4x^3+4x^2+5x-2) : (x+1)$

۲۳۹- $(x^5-3bx^4+5b^2x^3-8b^3x^2+6b^4x-4b^5) : (x-2b)$

۲۴۰- ضریب m را بطریقی تعیین کنید که عبارت $x^4-3x^2+mx+76$ بر $x+4$ قابل قسمت باشد .

۲۴۱- به ازای چه مقادیر m هریك ازعبارتهای : $x^4+ma^2x^2+a^4$ و $x^3-max^2+ma^2x-a^3$ بر $x^2-2ax+a^2$ قابل قسمت است .

۲۴۲- ضرایب m و n و p را بطریقی تعیین کنیدکه عبارت $x^5-2x^4-6x^3+mx^2+nx+p$ بر $(x^2-1)(x-3)$ قابل قسمت باشد .

۲۴۳- ضرایب p و q را بطریقی تعیین کنید که عبارت زیر بر x^2+2x+5 قابل قسمت باشد :

$$x^4+px^2+q$$

خارج قسمت وباقیماندهٔ هریك ازتقسیمهای زیررا معین کنید :

۲۴۴- $(a^3-1) : (a-1)$ ۲۴۵- $(x^5+1) : (x-1)$

۲۴۶- $(a^3+b^3) : (a+b)$ ۲۴۷- $(x^2+y^2) : (x+y)$

۲۴۸- $(x^4-1) : (x\pm 1)$ ۲۴۹- $(x^4-b^4) : (x\pm b)$

۲۵۰- $(a^6-1) : (a\pm b)$ ۲۵۱- $(32x^5+243) : (2x+3)$

۲۵۲- $(4x^3-6x^2-5x+1) : (x+2)$

۲۵۳- $(x^3-7x) : (x-2)$

۲۵۴- $(x^5+2x^4-3x^3+4x^2-1) : (x-1)$

۲۵۵- فرض می‌کنیم درتقسیمی با باقیماندهٔ صفر، مقسوم ومقسوم‌علیه بترتیب عبارتهایی به صورت $x^m \pm a^m$ و $x \pm a$ و خارج قسمت یکی از عبارتهای زیر باشد:

ا- x^2-x+1

ب- x^3-x^2+x-1

ج- $x^3+ax^2+a^2x+a^3$

د- $x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$

ه- $x^3y^3+mx^2y^2+m^2xy+m^3$

مقسوم و مقسوم‌علیه را در هر یك ازحالات بالا تعیین کنید.

فصل دوم

ریشهٔ اعداد و اعمال مربوط به آن

۱ ـ توانهای زیررا درنظر می‌گیریم :

$$\begin{cases}(+۴)^۲=+۱۶\\(-۴)^۲=+۱۶\end{cases}\qquad\begin{cases}(+۲)^۳=+۸\\(-۲)^۳=-۸\end{cases}$$

(۱۶+) توان دوم اعداد (۴+) و (۴−) است وهمچنین(۸+) توان سوم (۲+) و (۸−) توان سوم (۲−) است .

بالعکس (۴+) و (۴−) را ریشهٔ دوم (۱۶+) می گویند و (۲+) را ریشهٔ سوم (۸+) و (۲−) را ریشهٔ سوم (۸−) می‌نامند .

اگر m عددی صحیح ومثبت وA عددی جبری‌باشد، ریشهٔ mام عددجبریA (چنانچه‌موجود باشد) عددی‌جبری‌است‌مانند a بطوری‌که‌داشته باشیم :

$$(۱)\qquad a^m = A$$

واضح است که باید قدر مطلقهای a^m و A متساوی و علامتهای آنها متحد باشند . ریشهٔ m ام عدد جبری A را به صورت $\sqrt[m]{A}$ می‌نویسند . علامت $\sqrt{}$ را رادیکال و $\surd$ ، شاخهٔاول رادیکال ، را

فرجهٔ رادیکال می‌گویند .

اگر A عدد مثبتی باشد، a^m نیز مثبت است .

الف ـ اگر A مثبت و m جفت باشد ، a می‌تواند مثبت یامنفی باشد . (چرا؟)

ب ـ اگر A منفی و m جفت باشد ، رابطهٔ (۱) هیچوقت برقرار نیست .

ج ـ اگر A مثبت و m فرد باشد، باید a مثبت باشد.

د ـ اگر A منفی و m فرد باشد، باید a منفی باشد .

از آنچه گفته شدنتایج زیربدست می‌آید :

I ـ اعداد مثبت ، دوریشهٔ زوج دارندکه این‌دوریشه‌قرینهٔ یکدیگرند : $a'=+\sqrt[m]{A}$ و $a''=-\sqrt[m]{A}$

ریشهٔ چهارم ۸۱ اعداد (۳−) و (۳+) است و آن را چنین می‌نویسند :

$$+\sqrt[4]{81}=+3 \quad \text{و} \quad -\sqrt[4]{81}=-3$$

II ـ اعداد مثبت، یك‌ریشهٔ فرد دارندکه‌علامتش (+)است مانند :

$$\sqrt[3]{64}=+4$$

III ـ اعداد منفی، یك ریشهٔ فرد دارندکه علامتش (−) است .

مانند : $\sqrt[5]{-243}=-3$ و $\sqrt[3]{-8}=-2$

IV ـ اعداد منفی، ریشهٔ زوج ندارند یابه عبارت‌دیگر ریشهٔ زوج آنهاموهومی است .

«مثلا رادیکالهای $\sqrt[4]{-16}$ و $\sqrt{-1}$ جواب ندارند .»

تبصرهٔ ۱ ـ ریشهٔ دوم هر عدد را **جذر** وریشهٔ سومش را **کعب** آن عدد می‌گویند .

تبصرهٔ ۲ ـ وقتی‌که بخواهیم ازعدد مثبتی،ریشهٔ جفت بگیریم، جلو رادیکال علامت ± قرار می‌دهیم . اگر جلو رادیکال که فرجهٔ جفت‌دارد علامتی باشد ،مانند ($+\sqrt{25}$) یا ($-\sqrt{25}$)،دراین‌صورت بترتیب اعداد (۵+) یا (۵−) مورد نظر خواهد بود .

تبصرهٔ ۳ ـ اگر بخواهیم جذر x^2 را معین کنیم ، چنانچه x عددی مثبت باشد ، خواهیم داشت : $\sqrt{x^2}=x$ وهر گاه x عدد منفی باشد دراین صورت خواهیم داشت : $\sqrt{x^2}=-x$ زیرا رادیکال‌سمت چپ مثبت است .

به همین ترتیب درعبارت $\sqrt{(x-1)^2}$ باید بنویسیم :

اگر $x-1>0$ باشد، $\sqrt{(x-1)^2}=(x-1)$

اگر $x-1<0$ باشد، $\sqrt{(x-1)^2}=-(x-1)$

۴ ـ قضیه ـ شرط لازم وکافی برای برابری دوعدد مثبت این است‌که توان mام آنهامتساوی باشند.

اولاً شرط لازم است ـ اگر $a=b$ باشد ، توان m ام آنها با هم متساوی است : $a^m=b^m$.

ثانیاً شرط کافی است ـ به فرض آنکه $a^m=b^m$ باشد ، آن را به صورت $a^m-b^m=0$ می‌نویسیم . می‌دانیم این عبارت در همه حال بر $(a-b)$ قابل قسمت است وبا استفاده ازاین خاصیت، طرف اول رابطهٔ اخیر رابه حاصل ضرب دو عامل تجزیه کرده و آن را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+\dots+b^{m-1})=0$$

چون بنابر فرض ، a و b دو عدد مثبت هستند، بدیهی است که پرانتز دوم برابر صفر نمی‌شود .

پس باید $a-b=0$ باشد ،یعنی داشته باشیم $a=b$.

۴ ـ قضیهٔ اصلی ـ حاصل‌ضرب دو رادیکال که دارای یك فرجه و اعداد واقع در زیر آنها مثبت باشند ، مساوی است با رادیکالی که فرجه‌اش ، فرجهٔ مشترك رادیکالها وعدد واقع در زیر آن، حاصل ضرب‌اعداد واقع درزیر رادیکالها باشد.

به‌فرض اینکه A و B دوعدد مثبت باشند، بایدثابت کنیم :

$$\sqrt[m]{A}\cdot\sqrt[m]{B}=\sqrt[m]{A\cdot B} \qquad (۱)$$

فرض می‌کنیم :

$$\sqrt[m]{A}=a \qquad (۲)$$

$$\sqrt[m]{B}=b \qquad (۳)$$

$$\sqrt[m]{A\cdot B}=c \qquad (۴)$$

بارعایت این فرض باید درستی رابطهٔ زیررا ثابت کنیم :

$$a\cdot b=c \qquad (۵)$$

بنابر قضیهٔ قبل رابطهٔ (۵) وقتی بر قرار است‌که توانهای mام طرفین این رابطه متساوی‌باشند؛ یعنی‌برای اثبات قضیه کافی‌است درستی تساوی زیر راثابت‌کنیم :

$$a^m\cdot b^m=c^m \qquad (۶)$$

برای این منظور، ملاحظه می‌کنیم که اولا از روابط (۲) و (۳) و (۴) نتایج زیربدست می‌آید .

$$A=a^m \qquad (۷)$$

$$B=b^m \qquad (۸)$$

$$A\cdot B=c^m \qquad (۹)$$

ثانیاً از ضرب روابط (۷) و (۸) که عضو بعضو دریکدیگرضرب شوند چنین نتیجه می‌شود :

$$A\cdot B=a^m\cdot b^m \qquad (۱۰)$$

واز مقایسهٔ روابط (۹) و (۱۰) معلوم می‌شود :

$$a^m\cdot b^m=c^m \qquad (۱۱)$$

از بر قراری رابطهٔ (۱۱) که عیناً همان رابطهٔ (۶) است درستی

حکم قضیه یعنی صحت رابطهٔ $a.b=c$ ویا :

$$\sqrt[m]{A}\cdot\sqrt[m]{B}=\sqrt[m]{A.B}$$

محقق می‌شود .

نتیجهٔ ۱ ـ ازرابطهٔ : $\sqrt[m]{A.B}=\sqrt[m]{A}\cdot\sqrt[m]{B}$ (۱۲)

نتیجه می‌شود :

ریشهٔ mام حاصل ضرب دوعدد مساوی است باحاصل‌ضرب ریشه‌های mام هریك از آن دو عدد .

نتیجهٔ ۲ ـ چنانچه $\sqrt[m]{A}=a$ فرض شود ، رابطهٔ(۱۲) به‌صورت $\sqrt[m]{A.B}=a\sqrt[m]{B}$ در می‌آید که در آن a ، ریشهٔ mام A است . پس می‌توان گفت :

برای خارج‌کردن عاملی از زیر رادیکالی‌که فرجه‌اش m است، کافی است ریشهٔ mام آن‌عامل را استخراج وحاصل رادر رادیکال ضرب‌کنند .

مثال :

$$\sqrt{96}=\sqrt{16\times6}=4\sqrt{6}$$
$$\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{27\times2}=3\sqrt[3]{2}$$

نتیجهٔ ۳ ـ هرگاه عددی به صورت عامل ضرب در خارج رادیکالی‌که فرجه‌اش m است قرار داشته باشد، برای‌بردن عدد نامبرده به داخل رادیکال ، کافی است قدر مطلق آن عدد رابه

توان m برسانیم وحاصل رادر مقدار زیررادیکال ضرب‌کنیم.

$$2\sqrt{5}=\sqrt{2^2\times5}=\sqrt{20}$$
$$5\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{5^3\times4}=\sqrt[3]{500}$$
$$-3\sqrt{5}=-\sqrt{3^2\times5}=-\sqrt{45}$$

در حالت کلی ، هرگاه بخواهیم در عبارت $a\sqrt[m]{b}$ عامل a را به داخل رادیکال وارد کنیم ، اگر $0<a$ باشد، نتیجهٔ عمل چنین می‌شود: $\sqrt[m]{a^m.b}$؛ و اگر $a<0$ باشد چنین خواهیم داشت :

$$-\sqrt[m]{(|a|)^m.b}$$

نتیجهٔ ۴ـ درضرب چندرادیکال با فرجه‌های‌متساوی،کافی است یکی از رادیکالها را باهمان فرجهٔ مشترك نوشته ومقادیر زیررادیکالها را درهم ضرب‌کنیم و زیر رادیکال بنویسیم:

$$\sqrt[m]{A}\cdot\sqrt[m]{B}\cdot\sqrt[m]{C}=\sqrt[m]{A.B.C}$$

نتیجهٔ ۵ ـ برای آنکه ریشهٔ pام A رابه توانq برسانیم ، کافی‌است مقدار زیررادیکال‌رابه توان q برسانیم (q عددی است صحیح ومثبت).

بـاید ثابت‌کنیم :

$$(\sqrt[p]{A})^q=\sqrt[p]{A^q}$$

کافی است $\sqrt[p]{A}$ را q دفعه در خود ضرب کنیم :

$$(\sqrt[p]{A})^q = \overbrace{\sqrt[p]{A}\cdot\sqrt[p]{A}\cdots\cdots\sqrt[p]{A}}^{q\ \text{مرتبه}} = \sqrt[p]{A^q}$$

۴ - برای تقسیم دورادیکال دارای یك فرجه ، کافی است که‌یکی ازرادیکالها راباهمان فرجهٔ مشترك نوشته‌ومقدار واقع درزیر رادیکال‌مقسوم‌رابرمقدار واقع‌درزیر رادیکال‌مقسوم‌علیه تقسیم‌کنیم وحاصل را زیر رادیکال بنویسیم.

باید ثابت کنیم :

$$(E)\qquad \sqrt[m]{A} : \sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{\frac{A}{B}}$$

این تقسیم را امتحان می‌کنیم :

$$\sqrt[m]{\frac{A}{B}} \times \sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{\frac{A}{B}\times B} = \sqrt[m]{A}$$

پس رابطهٔ (E) صحیح است .

مثال :

$$\sqrt{۱۲} : \sqrt{۳} = \sqrt{۴} = ۲$$
$$\sqrt[۳]{۱۲۸} : \sqrt[۳]{۲} = \sqrt[۳]{۶۴} = ۴$$

۵ - قضیه - برای‌استخراج ریشهٔ mام $\sqrt[p]{A}$ کافی است فرجهٔ رادیکال را در m ضرب‌کنیم .

برای اثبات رابطهٔ: $\sqrt[m]{\sqrt[p]{A}} = \sqrt[mp]{A}$ کافی‌است طرفین‌تساوی

را به‌توان mp برسانیم. توان mpام رادیکال سمت‌راست A می‌شود. و رادیکال سمت چپ را ابتدا به توان m می‌رسانیم ، خواهیم داشت $\sqrt[p]{A}$ وسپس به‌توان p می‌رسانیم، حکم ثابت می‌شود .

مثال :

$$\sqrt[۳]{\sqrt{۵}} = \sqrt[۶]{۵} \ ،\ \sqrt{\sqrt{۷}} = \sqrt[۴]{۷} \ ،\ \sqrt[۳]{\sqrt[۳]{۶}} = \sqrt[۹]{۶}$$

۶ - قضیه - هرگاه فرجه و توان عدد زیر رادیکال را در عدد صحیح مثبتی مانند p ضرب‌کنیم ،درقدر مطلق ریشه‌تغییری ایجاد نمی‌شود .

برای اثبات درستی رابطهٔ: $\sqrt[p]{A} = \sqrt[pq]{A^q}$ ،کافی است طرفین این تساوی رابه توان pq برسانیم .

تبصره - بطور کلی اگر A مثبت باشد، $\sqrt[m]{A} = \sqrt[pm]{A^p}$ است.

ولی هرگاه A منفی باشد، واضح است که ریشهٔ جفت نخواهد داشت یعنی باید m فرد باشد تا $\sqrt[m]{A}$ دارای معنی باشد. در این حالت اگر بخواهیم فرجه وتوان عدد زیر رادیکال‌را در p ضرب‌کنیم، باید توجه داشته باشیم که :

اگر p فردباشد : $\sqrt[m]{A} = \sqrt[mp]{A^p}$

اگر p زوج باشد : $\sqrt[m]{A} = -\sqrt[mp]{A^p}$

$$\sqrt{5} = \sqrt[2\times3]{5^3} = \sqrt[6]{5^3}$$

$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3\times2]{a^{2\times2}} = \sqrt[6]{a^4}$$

$$\sqrt[3]{-2} = \sqrt[3\times5]{(-2)^5} = \sqrt[15]{-32}$$

$$\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3\times2]{(-2)^2} = -\sqrt[6]{4}$$

۷ ـ فرجهٔ مشترک‌گیری ـ می‌توان فرجه‌های چند رادیکال را باهم مساوی کرد؛ به این ترتیب که ابتدا کوچکترین مضرب مشترک فرجه‌ها راتعیین می‌کنیم وآن رافرجهٔ مشترک رادیکالها قرارمی‌دهیم. سپس فرجهٔ مشترک رابه هریک از فرجه‌های اصلی تقسیم‌کرده وخارج قسمت راتوان مقدار زیررادیکال مربوط قرار می‌دهیم .

مثال : فرجهٔ مشترک $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt{6}$ و $\sqrt[4]{4}$ ، کوچکترین مضرب مشترک فرجه‌ها یعنی عدد ۱۲ است،پس می‌توانیم بنویسیم :

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4} \quad و \quad \sqrt{6} = \sqrt[12]{6^6} \quad و \quad \sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{4^3}$$

تمرین- $\sqrt[3]{a}$ و $\sqrt[4]{b^3}$ و $\sqrt[6]{c}$ را به‌یک فرجه تبدیل کنید.

واضح است b و c باید مثبت باشند تا دو رادیکال $\sqrt[4]{b^3}$ و $\sqrt[6]{c}$ معنی داشته باشند واما a می‌تواند مثبت یامنفی باشد .

چنانچه a مثبت باشد :

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[12]{a^4} \quad و \quad \sqrt[4]{b^3} = \sqrt[12]{b^9} \quad و \quad \sqrt[6]{c} = \sqrt[12]{c^2}$$

وچنانچه a منفی باشد :

$$\sqrt[3]{a} = -\sqrt[12]{a^4}$$

نتیجه ـ می‌توان فرجهٔ رادیکال و توان مقدار زیر رادیکال را برعددی صحیح ومثبت تقسیم کرد .

مثال :

$$\sqrt[12]{2^4} = \sqrt[3]{2} \quad و \quad \sqrt[8]{6^6} = \sqrt[4]{6^3}$$

توجه ـ $\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{x}$ (اگر x مثبت باشد) و $\sqrt[6]{x^2} = -\sqrt[3]{x}$ (وقتی x منفی باشد) .

۸ـ جمع وتفریق رادیکالها ـفقطرادیکالهای متحد رامی‌توان جمع‌جبری‌کرد.مقصوداز رادیکالهای متحد،رادیکالهایی است‌که مقادیر واقع در زیرآنها باهم وفرجه‌های آنهانیزباهم‌مساوی باشند.

مجموع چند رادیکال متحد ، رادیکالی است متحد با آنها که ضریبش حاصل جمع جبری ضرایب رادیکالهاست .

مثال :

$$2\sqrt{5}+3\sqrt{5}-\sqrt{5}=4\sqrt{5}$$

$$3\sqrt[3]{4}+7\sqrt[3]{4}-5\sqrt[3]{4}=5\sqrt[3]{4}$$

$$16\sqrt{a}+5\sqrt{a}-20\sqrt{a}=\sqrt{a}$$

۹ـ ضرب وتقسیم رادیکالها ـ همه وقت می‌توان دو رادیکال رادرهم ضرب یابریکدیگر تقسیم کرد. اگر فرجه‌ها متساوی باشندیکی ازرادیکالها را نوشته ومقادیر زیر رادیکال راضرب یاتقسیم می‌کنیم .

هر گاه فرجه‌ها متساوی نباشند ، قبلا باید فرجه‌ها را مشترك کرد .

مثال :

$$\sqrt{2}\times\sqrt{6}=\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=2\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8\times3}=2\sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt{108}:\sqrt{12}=\sqrt{9}=3$$

$$\sqrt[3]{256}:\sqrt{8}=\sqrt[6]{256^2}:\sqrt[6]{8^3}=\sqrt[6]{128}=2\sqrt[6]{2}$$

۱۰ ـ نمای کسری ـ می‌دانیم ریشهٔ mام عدد A را به صورت $\sqrt[m]{A}$ می نویسند. چنانچه $A=a^n$ باشد، دراین صورت رادیکال نامبرده به‌صورت $\sqrt[m]{a^n}$ نوشته خواهد شد. رادیکال اخیر را می‌توان به‌صورت:

$a^{\frac{n}{m}}$ نیز نوشت که نمایندهٔ a کسر $\frac{n}{m}$ باشد. یعنی :

$$\boxed{\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}}$$

از رابطهٔ اخیر معلوم می‌شود که قوهٔ کسری هر عدد را می‌توان به‌صورت رادیکالی نوشت‌که مخرج کسر نمایندهٔ فرجهٔ رادیکال وصورت آن، نمایندهٔ همان عدد در زیر رادیکال باشد ؛ $a^{\frac{2}{3}}$ را به صورت $\sqrt[3]{a^2}$ و $x^{\frac{1}{2}}$ را به صورت $\sqrt{x}$ و $y^{\frac{3}{5}}$ را به صورت $\sqrt[5]{y^3}$ می‌توان نوشت .

بعکس ، $\sqrt{x}$ و $\sqrt[4]{(x+1)^3}$ را بترتیب می‌توان به صورتهای زیر نوشت :

$$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[4]{(x+1)^3}=(x+1)^{\frac{3}{4}} \qquad \text{و}$$

تبصره ـ کلیهٔ اعمالی که در رادیکالهاگفته‌شد، با استعمال نمایندهٔ کسری هم می‌توان انجام داد . مثلا :

$$\sqrt{x}\times\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{1}{2}}\times x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}=x^{\frac{7}{6}}=\sqrt[6]{x^7}=x\sqrt[6]{x}$$

$$(\sqrt[5]{x^2})^3=(x^{\frac{2}{5}})^3=x^{\frac{2}{5}\times 3}=x^{\frac{6}{5}}=x^{1+\frac{1}{5}}=x\times x^{\frac{1}{5}}=x\sqrt[5]{x}$$

۱۱ ـ تعریف ـ کسری را اصم یاگنگ می‌گویند که جمله‌ای‌از آن زیر رادیکال باشد .

۱۲ ـ گویا کردن مخرجهای گنگ ـ مقصود از گویا کردن مخرجهای‌گنگ حذف رادیکال ازمخرج کسرهاست ، بطوری‌که کسر اول وکسر حاصل معادل باشند .

الف ـ اگر مقصود گویاکردن مخرج‌کسر $\frac{A}{\sqrt{B}}$ باشد (A و B نمایش عبارات جبری هستند) کافی است صورت و مخرج کسر را در رادیکال مخرج ضرب کنیم .

مثال :

$$\frac{A}{\sqrt{B}}=\frac{A\sqrt{B}}{\sqrt{B}\cdot\sqrt{B}}=\frac{A\sqrt{B}}{B}$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{4}{3\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{15}$$

$$\frac{a-1}{2\sqrt{a+1}}=\frac{(a-1)\sqrt{a+1}}{2\sqrt{a+1}\times\sqrt{a+1}}=\frac{(a-1)\sqrt{a+1}}{2(a+1)}$$

ب ـ برای‌گویا کردن مخرج کسرهایی که‌به‌صورت $\frac{A}{\sqrt[m]{B^n}}$

بوده ودر آنها $n<m$ باشد ، کافی است صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[m]{B^{m-n}}$ ضرب‌کنیم .

مثال :

$$\frac{A}{\sqrt[m]{B^n}}=\frac{A\sqrt[m]{B^{m-n}}}{\sqrt[m]{B^n}\times\sqrt[m]{B^{m-n}}}=\frac{A\sqrt[m]{B^{m-n}}}{B}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}}=\frac{2\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2^2}}=\frac{2\sqrt[3]{4}}{2}=\sqrt[3]{4}$$

ج ـ برای‌گویاکردن مخرج‌کسرهایی‌که به صورت $\frac{A}{B\pm\sqrt{C}}$ یا $\frac{A}{\sqrt{B}\pm\sqrt{C}}$ باشند ، کافی است صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب‌کنیم :

مثال :

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$$

$$\frac{12}{2+\sqrt{3}}=\frac{12(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=12(2-\sqrt{3})$$

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$$

د ـ برای گویاکردن مخرج کسرهایی به‌صورت : $\frac{A}{B\pm\sqrt{C}\pm\sqrt{D}}$ یا $\frac{A}{\sqrt{B}\pm\sqrt{C}\pm\sqrt{D}}$ ابتدا $(\sqrt{C}\pm\sqrt{D})$ رایك

جملهٔ فرض کرده ومانند حالت قبل‌صورت و مخرج کسر رادر مزدوج مخرج یعنی : $B\mp(\sqrt{C}\pm\sqrt{D})$ یا $\sqrt{B}\mp(\sqrt{C}\pm\sqrt{D})$ ضرب می‌کنیم .

پس از اختصار ، باضرب در مزدوج مخرج جدید ، مخرج‌کسر اصلی گویا می‌شود .

مثال :

$$\frac{۳+۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}=\frac{(۳+۴\sqrt{۳})[(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})+\sqrt{۳}]}{[(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})-\sqrt{۳}][(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})+\sqrt{۳}]}$$

$$=\frac{(۳+۴\sqrt{۳})(\sqrt{۶}+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})}{(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^{۲}-۳}$$

$$=\frac{(۳+۴\sqrt{۳})(\sqrt{۶}+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})}{۵+۴\sqrt{۳}}$$

$$=\frac{(۳+۴\sqrt{۳})(\sqrt{۶}+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})(۵-۴\sqrt{۳})}{(۵+۴\sqrt{۳})(۵-۴\sqrt{۳})}$$

$$=\frac{(۳+۴\sqrt{۳})(\sqrt{۶}+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})(۵-۴\sqrt{۳})}{۲۵-۴۸}$$

$$=\frac{۲۵\sqrt{۶}+۳۳\sqrt{۳}+۹\sqrt{۲}-۲۴}{۲۳}$$

ه ـ برای گویاکردن مخرج کسرهایی به‌صورت :

$$\frac{A}{\sqrt[3]{B}\mp\sqrt[3]{C}}$$

چون طبق اتحادهای هشتم ونهم شمارهٔ (۱۹) داریم :

$$a\pm b=\frac{a^{۳}\pm b^{۳}}{a^{۲}\mp ab+b^{۲}}$$

باید صورت ومخرج را در :

$$(\sqrt[۳]{B^{۲}}\mp\sqrt[۳]{BC}+\sqrt[۳]{C^{۲}})$$

ضرب کنیم تامخرج کسر گویاشود . زیرا می‌دانیم‌که :

$$(\sqrt[3]{B}\pm\sqrt[3]{C})(\sqrt[3]{B^{۲}}\mp\sqrt[3]{BC}+\sqrt[3]{C^{۲}})=B\pm C$$

مثال :

$$\frac{۱}{\sqrt[3]{۳}+\sqrt[3]{۲}}=\frac{\sqrt[3]{۹}+\sqrt[3]{۴}-\sqrt[3]{۶}}{(\sqrt[3]{۳}+\sqrt[3]{۲})(\sqrt[3]{۹}+\sqrt[3]{۴}-\sqrt[3]{۶})}=\frac{\sqrt[3]{۹}+\sqrt[3]{۴}-\sqrt[3]{۶}}{۳+۲}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{۹}+\sqrt[3]{۴}-\sqrt[3]{۶}}{۵}$$

و ـ برای گویا کردن مخرج کسرهایی به صورت :

$$\frac{A}{\sqrt[۴]{B}\pm\sqrt[۴]{A}}$$

کافی است ابتدا صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب‌کرده سپس صورت ومخرج کسر حاصل‌رانیز درمزدوج مخرجش ضرب کنیم .

مثال :

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}}=\frac{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{9}-\sqrt[4]{4}}=\frac{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$=(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

تمرین

حاصل عبارات زیر را معین کنید :

-۱ $5\sqrt{3}\times 4\sqrt{6}$ -۲ $\sqrt[3]{25}\times\sqrt[3]{5}$

-۳ $\sqrt[4]{8}\times\sqrt[4]{32}$ -۴ $\frac{1}{2}\sqrt{2x}\times\sqrt{8x}$

-۵ $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{2}$ -۶ $\sqrt[4]{8}\times\sqrt{2}$

-۷ $\sqrt[3]{5}\times\sqrt{6}$

-۸ $a>0$ $\sqrt[4]{a^3}\times\sqrt[3]{a^2}$

-۹ $a>0$ $\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a}\times\sqrt[4]{a}$

-۱۰ $a>0$ $\sqrt[5]{a^3}\times\sqrt[6]{a^5}\times\sqrt[3]{a^2}$

-۱۱ $x>0$ و $y>0$ $\sqrt[3]{xy^2}\times\sqrt{x^2y}$

-۱۲ $a>0$ $(2+\sqrt{a})(2-\sqrt{a})$

-۱۳ $x>0$ $(\sqrt{x}-3)(2\sqrt{x}-3)$

-۱۴ $a>0$ $\sqrt[4]{a^3}\times\sqrt[8]{a^2}(-\sqrt{a})$

-۱۵ $(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})$

-۱۶ $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)^2$

-۱۷ $\left.\begin{matrix}a>0\\ b>0\end{matrix}\right\}$ $(2a\sqrt{b}+b\sqrt{a})(a\sqrt{b}-2b\sqrt{a})$

-۱۸ $(3x\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})^2$

-۱۹ $4\sqrt[3]{12} : 2\sqrt{3}$ -۲۰ $\sqrt[4]{4} : \sqrt[6]{8}$

-۲۱ $2\sqrt[6]{27} : \sqrt[4]{9}$ -۲۲ $5\sqrt[3]{6} : \sqrt[3]{4}$

-۲۳ $\frac{1}{3}\sqrt[3]{15} : \sqrt[3]{18}$ -۲۴ $\sqrt[3]{7a^2} : \sqrt[3]{ac^2}$

-۲۵ $6\sqrt[3]{a} : (-\sqrt{2a})$ -۲۶ $\sqrt[4]{x} : \sqrt[3]{x}$

-۲۷ $(2\sqrt{32}+3\sqrt{2}+\sqrt[4]{4}) : \sqrt{8}$

-۲۸ $(\sqrt{8}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[4]{2}) : \sqrt{2}$

-۲۹ $(\sqrt{8}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[4]{2}) : 2\sqrt{2}$

-۳۰ $\left(2\sqrt[12]{\sqrt[5]{7}}+3\sqrt[6]{\sqrt[10]{7}}+3\sqrt[5]{\sqrt[12]{7}}\right) : \sqrt[10]{\sqrt[6]{7}}$

-۳۱ $(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[5]{b^2})(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[5]{b^2})$

-۳۲ $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2}}\times\sqrt[6]{\sqrt[4]{a^9}}$

حاصل توانها و ریشه‌های زیررا تعیین‌کنید:

-۳۳ $(2\sqrt{a})^3$ -۳۴ $(a\sqrt{3})^2$

-۳۵ $(7\sqrt[3]{x^2-y^2})^3$ -۳۶ $(\sqrt[3]{a^2x})^3$

-۳۷ $\sqrt{5\sqrt{27}}$ -۳۸ $\sqrt{9\sqrt{3}}$

-۳۹ $\sqrt[2]{a^2\sqrt{b}}$ -۴۰ $\sqrt[3]{\frac{1}{64}\sqrt{2}}$

-۴۱ $\sqrt[3]{\sqrt[7]{8a^3}}$ -۴۲ $\sqrt[3]{\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{x}{2}}}$

-۴۳ $\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{2}}}$ -۴۴ $(\sqrt[3]{\sqrt[5]{8a^3}})^5$

-۴۵ $\sqrt[4]{\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt[3]{ab}}}$ -۴۶ $\sqrt[n-1]{\frac{a}{\sqrt[n]{a}}}$

-۴۷ $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ -۴۸ $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$

-۴۹ $\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}}$

حاصل عبارات زیررا به ساده‌ترین صورت بنویسید :

-۵۰ $6\sqrt{3}-5\sqrt{3}+\frac{3}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

-۵۱ $2\sqrt[3]{2}+3\sqrt{3}-3\sqrt[3]{3}-2\sqrt{2}$

-۵۲ $\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{6}$

-۵۳ $\sqrt{48}-\sqrt{27}-\sqrt{12}-\sqrt{108}$

-۵۴ $2\sqrt{8}+5\sqrt{72}-7\sqrt{18}-\sqrt{50}$

-۵۵ $3\sqrt{20}-4\sqrt{245}-2\sqrt{125}+4\sqrt{180}$

-۵۶ $4\sqrt{7}+3\sqrt{63}-2\sqrt{28}$

-۵۷ $8\sqrt{\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\sqrt{12}+4\sqrt{27}-2\sqrt{\frac{3}{16}}$

-۵۸ $\sqrt{45c^3}-\sqrt{80c^3}+\sqrt{5a^2c}$

-۵۹ $\sqrt{18a^5b^3}+\sqrt{50a^3b^3}$

-۶۰ $\sqrt{4a^3b^2-8a^2b^2}$

-۶۱ $\sqrt{18a^3b^3c^4+9a^2b^2c^4}$

-۶۲ $\sqrt{3a^2c+6abc+3b^2c}$

-۶۳ $\sqrt{\frac{a^4c}{b^3}}+\sqrt{\frac{a^2c^3}{bd^2}}-\sqrt{\frac{a^2c^3d^2}{bc^2}}$

-۶۴ $\sqrt{\frac{m-n}{n^2}}+\sqrt{\frac{m}{n^2}-\frac{1}{n}}$

-۶۵ $\sqrt{9x+27}+3\sqrt{4x+12}$

-۶۶ $5\sqrt[6]{49}-\sqrt[3]{56}$

-۶۷ $\sqrt{x^2y}+\sqrt{y^3}-\sqrt{y(x-y)^2}$

۶۸- $\sqrt{(a^2-b^2)(a+b)}-\sqrt{4a^3-4a^2b}+\sqrt{(a-b)^3}$

رادیکالهای زیررا به یك فرجه تبدیل کنید :

۶۹- $\sqrt[8]{xy^3}$ و $\sqrt[6]{3x^2y^3}$

۷۰- $\sqrt[n]{(a-b)^p}$ و $\sqrt[m]{(a^2+x^2)^2}$

۷۱- $\sqrt{a}$ و $\sqrt[3]{b}$ و $\sqrt[4]{ax}$ و $\sqrt[5]{a-x}$

اعمال زیررا انجام دهید :

۷۲- $\sqrt[3]{5a^4(a+b)^7}-4ab\sqrt[3]{5a^2(a+b)}$

۷۳- $\sqrt[5]{32a^3+96x}+\sqrt[5]{a^8+3a^5x}+\sqrt[5]{a^3x^5+3x^6}$

۷۴- $\sqrt[3]{\frac{a^7c-a^6b}{c^2}}-\sqrt[3]{\frac{a^4c-a^3b}{c^2}}$

مخرج کسرهای زیرراگویا کنید :

۷۵- $\frac{3-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ ۷۶- $\frac{3}{4\sqrt{3}}$

۷۷- $\frac{a+b}{a\sqrt{b}}$ ۷۸- $\frac{\sqrt{10}-3}{3\sqrt{2}}$

۷۹- $\frac{2}{2+\sqrt{6}}$ ۸۰- $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$

۸۱- $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ ۸۲- $\frac{4}{\sqrt{6}-2}$

۸۳- $\frac{4\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-5}$ ۸۴- $\frac{1}{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$

۸۵- $\frac{\sqrt{b+1}+1}{\sqrt{b+1}-1}$ ۸۶- $\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{5}}$

۸۷- $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ۸۸- $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-5}$

۸۹- $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ ۹۰- $\frac{156+12\sqrt{11}}{6-2\sqrt{11}+14\sqrt{2}}$

۹۱- $\frac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}}$ و $\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$

۹۲- $\frac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}$

حاصل توانهای زیررا به ساده‌ترین صورت بنویسید :

۹۳- $27^{\frac{1}{3}}$ ۹۴- $4^{\frac{1}{2}}$

۹۵- $(10x)^5$ ۹۶- $10(x)^5$

۹۷- a^{-2} ۹۸- $8^{\frac{2}{3}}$

۹۹- $(xy)^{-3}$ ۱۰۰- y^{-4}

۱۰۱- $a^{-2}:b^{-3}$ ۱۰۲- $(a+b)^{-\frac{2}{3}}\cdot(a+b)^{\frac{2}{3}}$

۱۰۳- $9^{\frac{1}{2}}$ ۱۰۴- $5x^{-1}$

۱۰۵- $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ ۱۰۶- $(c^2+d^2)^{-\frac{1}{3}}\cdot(c^2+d^2)^{\frac{1}{2}}$

۱۰۷- $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ ۱۰۸- $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

۱۰۹- $(-27)^{\frac{2}{3}}$ ۱۱۰- $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$

۱۱۱- $\left(\frac{16}{9}\right)^{-\frac{2}{3}}$ ۱۱۲- $\left(\frac{27}{64}\right)^{0/25}$

۱۱۳- $\left(\frac{4}{9}\right)^{-0/5}+\frac{5^0}{2}-4^{\frac{2}{3}}$

به فرض آنکه حروف زیر حقیقی ومثبت باشند ، حاصل عبارات زیررا تعیین کنید :

۱۱۴- $a^{-1}b+ab^{-1}$ ۱۱۵- $\frac{c^{-1}}{d}+\frac{d^{-1}}{c}$

۱۱۶- $b^{\frac{2}{3}}a^2 \cdot b^2 \cdot a^{\frac{3}{2}}$ ۱۱۷- $\frac{3a^{-2}xy^{-1}}{4ax^{-1}y^3}$

۱۱۸- $\frac{(ab^2)^{\frac{2}{3}} \cdot c^{\frac{1}{3}}}{(bc^2)^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}$ ۱۱۹- $\frac{5x^0+(5a)^0}{3(x+a)^0}$

۱۲۰- $\frac{[x^4(x+y)^6]^{\frac{1}{2}}}{x(x+y)}$

۱۲۱- $\frac{1+y(1+y)^{-\frac{1}{2}}}{y+(1+y)^{-\frac{1}{2}}}$

۱۲۲- حاصل x^3+3x+2 را به‌ازای : $x=(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}-(\sqrt{2}-1)^{-\frac{1}{3}}$ حساب‌کنید .

۱۲۳- به‌ازای $x=a^{-1} \cdot \left(\frac{2a}{b}-2\right)^{\frac{1}{2}}$ حاصل : $(1-ax)(1+ax)^{-1}\times(1+bx)^{\frac{1}{2}}(1-bx)^{-\frac{1}{2}}$ را حساب‌کنید.

۱۲۴- به‌ازای $x=2a^{-1}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$ حاصل عبارت : $2a(1+x^2)^{\frac{1}{2}}[x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}]^{-1}$ را حساب‌کنید .

مخرج‌کسرهای زیر راگویاکنید :

۱۲۵- $\frac{3}{\sqrt[4]{2}-1}$ ۱۲۶- $\frac{3}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}}$

۱۲۷- $\frac{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{6}}$ ۱۲۸- $\frac{1+\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{6}}$

۱۲۹- $\frac{1}{\sqrt[3]{4}\pm\sqrt[3]{2}}$ ۱۳۰- $\frac{1+\sqrt[3]{3}}{1-\sqrt[3]{3}}$

۱۳۱- $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}}$ ۱۳۲- $\frac{a}{\sqrt[6]{3}-\sqrt[6]{2}}$

۱۳۳- $\frac{6}{\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}}$ ۱۳۴- $\frac{7}{\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}}$

فصل سوم

معادلهٔ درجهٔ اول یك مجهولی

۱ـ هر تساوی را که شامل یك یا چند حرف ، موسوم به‌حرف یا حروف **مجهول** ، باشد وفقط به‌ازای یك یا چند مقدار معین‌که به این حرف یا حروف مجهول نسبت داده شود حاصل دو طرف تساوی با هم مساوی شوند ، **معادله** می‌نامند .

مثلاً طرفین تساوی $2x+1=5$ فقط به ازای $x=2$ و طرفین تساوی $x^2+8=6x$ فقط به ازای اعداد $x=2$ و $x=4$ با هم برابر می‌شوند ، پس هریك ازاین دوتساوی ، یك معادله است .

مقصود از حل یك معادله تعیین مقدار یا مقادیر حرف مجهول است ، بطوری‌که اگر آن مقدار یا مقادیر را در معادله به جای حرف مجهول قرار دهیم صدق‌کنند، یعنی نتیجهٔ محاسبهٔ دوطرف تساوی با هم برابر شوند . مقدار یا مقادیری که در معادله صدق می‌کنند ، **ریشه** ، یا **ریشه‌های معادله** نامیده می‌شوند .

معادله را یك مجهولی می‌گویند وقتی‌که‌فقط شامل یك حرف

مجهول باشد وچنانچه معادله دارای دویاسه یا ... حرف مجهول باشد، معادله را دو یا سه یا ... مجهولی می‌گویند .

درمعادلات حرفی ، غیر از مجهول اصلی ، حروف دیگری هم وجود دارد که در این معادلات ، این حروف مانند اعداد معلومند و آنها را ضرایب حرفی یا پارامتر می‌نامند . مثلا ضرایب معادلهٔ $3x^2-x=2$ که اعداد ۳ و ۱ــ و ۲ می‌باشند عددی است و در معادلهٔ $mx+1=(2m-1)x^2$ که بعضی ضرایب آن شامل پارامتر m است، می‌گویند ضرایب آن پارامتری است .

۲ـ حل معادلات ـ در حل معادلات ، عملیات زیر ، چنانچه لازم باشد ، بترتیب انجام می‌شود :

الفـ اتحادها را بسط می‌دهیم .

ب ـ ضربها را انجام می‌دهیم .

ج ـ مخرجها را حذف می‌کنیم .

د ـ جمله‌های مجهول را به‌طرف اول ومقادیرمعلوم را به طرف دوم تساوی منتقل می‌کنیم .

ه ـ پس از اختصار ، مقدار معلوم را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم .

مثال۱ ـ مطلوب است حل‌معادلهٔ :

$$2(x+2)^2-(2x+1)(x-3)=0$$
$$2(x^2+4x+4)-(2x^2-6x+x-3)=0$$
$$2x^2+8x+8-2x^2+6x-x+3=0$$

$$۱۳x+۱۱=۰$$
$$۱۳x=-۱۱$$
$$\boxed{x=-\frac{۱۱}{۱۳}}$$

مثال۲ ـ مطلوب است حل‌معادلهٔ :

$$\frac{x}{۲}+\frac{x+۱}{۳}-\frac{۲x-۳}{۴}=x-۷$$

حل :

$$\frac{x}{۲}+\frac{x+۱}{۳}-\frac{۲x-۳}{۴}-\frac{x-۷}{۱}=۰$$

مخرج مشترك ۱۲ است :

$$۶x+۴(x+۱)-۳(۲x-۳)-۱۲(x-۷)=۰$$
$$-۸x+۹۷=۰$$
$$-۸x=-۹۷$$
$$\boxed{x=\frac{۹۷}{۸}}$$

تبصرهٔ ۱ ـ می‌توان طرفین تساوی را **فقط** برعاملی‌که مخالف صفر باشد، تقسیم کرد. مثلاً درمعادلهٔ :

$$(۲x-۱)(x^۲+۴)=(x-۳)(x^۲+۴)$$

می‌توان طرفین را بر $x^۲+۴$ که همواره مثبت و مخالف صفر است تقسیم کرد . ولی درمعادلهٔ :

$$(x-۴)(۴x-۵)=(۲x-۷)(x-۴)$$

اگر طرفین را بر عامل $(x-۴)$ تقسیم کنیم ، یك جواب $x=۴$ از بین می‌رود .

تبصرهٔ ۲ ـ در حل **معادلات‌کسری** ، یعنی معادلاتی که در مخرج حرف مجهول دارند، درصورت امکان، کسرها را ساده وهمه‌را به‌یك طرف معادله منتقل می‌کنیم .

پس از تعیین کوچکترین مخرج مشترك و حذف مخرجها ، جواب معادله رامانند (مثال ۲) بدست می‌آوریم .

مثال ـ مطلوب است حل معادلهٔ :

$$\frac{x-۳}{x^۲+۲x}-\frac{x+۳}{۴-x^۲}-\frac{۲x}{x^۲-۴}=۰$$

حل :

پس ازتجزیهٔ مخرجها، کوچکترین مخرج مشترك عبارت است از $x(x+۲)(x-۲)$. وچون کسر برابرصفر می‌شود، درنتیجه‌صورت کسر صفرخواهد بود:

$$\frac{x-۳}{x(x+۲)}-\frac{x+۳}{(۲-x)(۲+x)}-\frac{۲x}{(x-۲)(x+۲)}=۰$$
$$\frac{x-۳}{x(x+۲)}+\frac{x+۳}{(x-۲)(x+۲)}-\frac{۲x}{(x-۲)(x+۲)}=۰$$
$$(x-۳)(x-۲)+(x+۳)x-۲x^۲=۰$$
$$-۲x+۶=۰$$
$$\boxed{x=۳}$$

۳ ـ معادلهٔ زیر راحل می‌کنیم :

$$\frac{5x}{7}=10\left(\frac{x}{14}+1\right)$$
$$\frac{5x}{7}=\frac{5x}{7}+10$$
$$5x-5x=70$$
$$x(5-5)=70$$
$$0\times x=70$$

چون هرعددی را در صفر ضرب کنیم حاصل صفر خواهد شد، پس معادلهٔ مفروض هیچوقت دارای جواب نیست ، یعنی نمی‌توان مقدار x را طوری تعیین کرد که در معادله صدق کند . در چنین حالتی معادله را **ممتنع** می‌گویند (ودر این‌حال چون جواب معادله به صورت يك عدد تقسیم برصفر می‌شود ومی‌دانیم **که** هرعدد تقسیم برصفربرابر بینهایت است می‌گویند جواب معادله ∞ است) .

۴ ـ اکنون معادلهٔ زیر راحل می‌کنیم :

$$3(9+8x)-27=24x$$
$$27+24x-27-24x=0$$
$$24x-24x=0$$
$$x(24-24)=0$$
$$0\times x=0$$

در این معادله به‌جای x هرعددی قرار دهیم صدق می‌کند.پس جمیع اعداد می‌توانند جواب معادله باشند، یعنی معادله دارای‌بینهایت جواب است؛ در این حالت معادله را **مبهم** می‌گویند (معادله جوابهای بیشمار دارد).

نتیجه ـ هر معادلهٔ يك مجهولی درجهٔ اول، پس از اختصار به صورت کلی $ax+b=0$ تبدیل می‌شود . چنانچه $a\neq 0$ باشد، معادله همواره دارای جواب است (خواه b صفر یامخالف آن باشد) وجواب معادله $x=-\frac{b}{a}$ است . هر گاه فقط $a=0$ و $b\neq 0$ باشد ، معادله **ممتنع** است. چنانچه $a=b=0$ باشد، معادله **مبهم** است .

مثال۱ ـ m را بطریقی تعیین کنید که معادلهٔ زیر ممتنع شود:

$$(m-1)x-8m-5=0$$

حل :

$$(m-1)x=8m+5$$

وقتی این معادله ممتنع خواهد شد که $m-1=0$ یا $m=1$ باشد .

مثال۲ ـ معادلهٔ $2-\frac{x-m}{m+3}=\frac{2-3x}{5}$ راحل وبحث‌کنید .

مقصود از حل و بحث معادلهٔ حرفی این است که ببینیم معادلهٔ مفروض به ازای چه مقادیری از حرف مورد نظر دارای جواب است ودر چه صورت معادله مبهم یاممتنع می‌شود .

قبل ازحل می‌دانیم $m+3\neq 0$ استزیرادر غیر این‌صورت‌کسر طرف اول معادله بینهایت می‌شود .

$$10(m+3)-5(x-m)=(2-3x)(m+3)$$
$$10m+30-5x+5m=2m+6-3mx-9x$$
$$4x+3mx=-24-13m$$
$$x(4+3m)=-24-13m$$

اگر $3m+4\neq 0$ باشد معادله دارای جواب $x=-\frac{24+13m}{4+3m}$ است.

هرگاه $3m+4=0$ یا $m=-\frac{4}{3}$ باشد، معادله ممتنع است وجواب نخواهیم داشت. این‌معادله هیچوقت مبهم نیست (چرا؟).

مثال۴ ـ معادلهٔ $m^2x-m^2+mx-3m-2x-2=0$ را حل و بحث کنید.

پس ازعملیات لازم، نتیجه می‌شود:

$$(m+2)(m-1)x=(m+2)(m+1)$$

اگر $(m+2)(m-1)\neq 0$ باشد یعنی $m\neq 1$ و $m\neq -2$ باشد، معادله دارای جواب $x=\frac{m+1}{m-1}$ است.

به ازای $m=1$ معادله ممتنع وبه ازای $m=-2$ معادله‌مبهم است.

حل‌معادلات اصم‌قابل تبدیل به‌معادلات درجهٔ‌اول

۵ ـ هر معادله که حرف مجهولش زیر رادیکال باشد، آن را **معادلهٔ‌اصم** می‌گویند. مانند:

$$\sqrt{x-3}=0 \quad \text{و} \quad \sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=3$$

معادلاتی نظیر $\sqrt{x^2-2x+1}=4$ اصم نیستند، زیرا می‌توان آن را به صورت $\sqrt{(x-1)^2}=4$ نوشت؛ در صورتی که $x-1>0$ باشد، خواهیم داشت $x-1=4$ و چنانچه $x-1<0$ باشد خواهیم داشت $-(x-1)=4$ که هیچکدام اصم نیستند.

۶ ـ حل‌معادلات اصم:

الفـ چنانچه صورت کلی معادلهٔ اصم $\sqrt{A}=B$ باشد (A و B نمایش کثیرالجمله‌هایی بر حسب x هستند). طرفین معادله را مربع می‌کنیم تا رادیکال حذف شود. وقتی‌که طرفین تساوی را به توان زوج می‌رسانیم، احتمالاً جواب خارجی پیدا می‌شود. زیرا مربع $\sqrt{A}=B$ و $\sqrt{A}=-B$ هر دو یکی است. به این جهت بعد از محاسبه باید جوابها راامتحان کرد وجواب خارجی را ازجواب معادله تمیزداد.

مثال۱ ـ مطلوب است حل معادلهٔ:

$$\sqrt{x-3}=2$$
$$x-3=2^2$$
$$x-3=4$$
$$x=7$$

چنانچه عدد ۷ را درمعادله به‌جای x قرار دهیم می‌بینیم طرفین معادله باهم برابر می‌شوند، یعنی عدد ۷ در معادله صدق می‌کند. پس ۷ ریشهٔ معادله است.

مثال۲ ـ مطلوب‌است‌حل معادلهٔ:

$$\sqrt{2x^2-4}=x$$
$$2x^2-4=x^2$$
$$x^2=4$$
$$x=\pm 2$$

می بینیم $x=2$ در معادله صدق می‌کند ولی اگر $x=-2$ را در معادله بگذاریم دو طرف معادله با هم برابر نمی‌شوند . پس جواب معادله فقط $x=2$ است .

مثال۳ ـ مطلوب است حل معادلهٔ :

$$\sqrt{x^2+3}-5=x$$
$$\sqrt{x^2+3}=x+5$$
$$x^2+3=(x+5)^2$$
$$x^2+3=x^2+10x+25$$
$$10x=-22$$
$$x=-2/2$$

مثال۴ ـ مطلوب است حل معادلهٔ :

$$\sqrt[3]{x+1}=2$$

طرفین تساوی را به توان فرجهٔ رادیکال می‌رسانیم :

$$x+1=2^3$$
$$x+1=8$$
$$x=7$$

ب ـ هرگاه معادله به صورت : $\sqrt{A}\pm\sqrt{B}=C$ باشد ، اعم از اینکه C مساوی یا مخالف صفر باشد، یکی از رادیکالها را به طرف دیگر منتقل وطرفین تساوی رامربع می‌کنیم ، لااقل یکی از رادیکالها حذف می‌شود. سپس مانندحالت قبل معادله رامی‌توان حل‌کرد.

مثال۱ ـ مطلوب است حل‌معادلهٔ :

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}=3$$
$$\sqrt{x+1}=3-\sqrt{x-3}$$
$$x+1=(3-\sqrt{x-3})^2$$
$$x+1=9+x-3-6\sqrt{x-3}$$
$$6\sqrt{x-3}=5$$
$$x=\frac{133}{36}$$

مثال۲ ـ مطلوب است حل معادلهٔ :

$$4\sqrt{2x-1}-3\sqrt{3x+1}=0$$
$$4\sqrt{2x-1}=3\sqrt{3x+1}$$
$$16(2x-1)=9(3x+1)$$
$$32x-16=27x+9$$
$$5x=25$$
$$x=5$$

ج ـ هر گاه معادله به صورت $\sqrt{A}\pm\sqrt{B}\pm\sqrt{C}\pm D=0$

باشد (D صفر یامخالف صفر)، در هر حال با حفظ دو رادیکال در یك طرف ونقل بقیه به طرف دیگر تساوی ، طرفین معادلهٔ حاصل را مربع می‌کنیم و این عمل را هر چند بار که مورد لزوم باشد تکرارمی‌کنیم تا جواب معادله بدست آید.

مثال ۱ -

$$\sqrt{x+17}-\sqrt{x+1}-2\sqrt{x-7}=0$$
$$\sqrt{x+17}-\sqrt{x+1}=2\sqrt{x-7}$$
$$(\sqrt{x+17}-\sqrt{x+1})^2=(2\sqrt{x-7})^2$$
$$x+17+x+1-2\sqrt{(x+17)(x+1)}=4(x-7)$$
$$23-x=\sqrt{(x+17)(x+1)}$$
$$(23-x)^2=(\sqrt{(x+17)(x+1)})^2$$
$$529-46x+x^2=x^2+18x+17$$
$$64x=512$$
$$x=8$$

مثال۲ - مطلوب است حل‌معادلهٔ :

$$\sqrt{x+7}-\sqrt{x+5}=\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}$$

طرفین معادله رامربع می‌کنیم :

$$x+7+x+5-2\sqrt{(x+7)(x+5)}=x+3+x+2-2\sqrt{(x+3)(x+2)}$$

وپس ازاختصار :

$$7-2\sqrt{x^2+12x+35}=-2\sqrt{x^2+5x+6}$$

$$49+4(x^2+12x+35)-28\sqrt{x^2+12x+35}=4(x^2+5x+6)$$

پس ازساده کردن نتیجه می‌شود :

$$28x+165=28\sqrt{x^2+12x+35}$$

طرفین را مجذور می‌کنیم .

$$784x^2+27225+9240x=784(x^2+12x+35)$$
$$168x=-215$$
$$x=-\frac{215}{168}$$

تمرین

معادلات زیررا حل‌کنید :

۱- $18x+4=34x-14$

۲- $7(x-8)=2(x-14)$

۳- $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=11$

۴- $x+\frac{2x}{3}-\frac{3x}{4}+\frac{4x}{5}-\frac{5x}{6}=\frac{53}{60}$

۵- $\frac{2x}{7}-\frac{x}{5}=\frac{1}{2}$

۶- $\frac{2x-3}{4}-\frac{3x-1}{8}=\frac{x-2}{2}$

-۷ $\frac{3(5-2x)}{5x}=\frac{5x-2}{15}-\frac{x+3}{3}$

-۸ $\frac{10x+3}{3}-\frac{3x-1}{5}=x+\frac{44}{15}$

-۹ $\frac{1}{x}+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

-۱۰ $\frac{1}{x-3}-\frac{4}{x-2}=\frac{7}{(x-3)(x-2)}$

-۱۱ $\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x+3}=\frac{1}{3(x-2)}$

-۱۲ $(3x-4)^2(3x+8)=27x^3$

-۱۳ $(x+1)(x-4)+(x+1)(x-5)=2(x-5)\left(x+\frac{5}{6}\right)$

-۱۴ $\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)=(x-5)(x+3)+\frac{27}{4}$

-۱۵ $\frac{4}{9}\left[13x-6-5\left(\frac{7x}{2}-15\right)\right]+23(x-2)+\frac{3}{4}=0$

-۱۶ $\frac{2}{x-3}+\frac{2}{x+3}=\frac{6}{x^2-9}$

-۱۷ $\frac{2a-1}{a-6}-\frac{a}{a+1}=1$

-۱۸ $\frac{2}{b+5}+\frac{20}{b^2-25}=\frac{3}{5-b}$

-۱۹ $\frac{3a-2}{4a-5}+\frac{2(17+2a^2)}{25-16a^2}=\frac{2a+1}{4a+5}$

-۲۰ $\frac{x-2}{x-5}+\frac{x-1}{x+4}=\frac{2x^2-6x+5}{x^2-x-20}$

-۲۱ $\frac{\frac{x-1}{2}-\frac{x-3}{4}}{2x+\frac{4}{1+\frac{x+1}{x-1}}}=\frac{x}{8}$ -۲۲ $\frac{\frac{x+1}{x+2}-\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x+1}{x-1}}=-\frac{1}{2}$

-۲۳ $\frac{2+2x}{9x^2-4}-\frac{x-2}{9x^2+12x+4}+\frac{x+4}{4-9x^2}=0$

-۲۴ $\frac{x+a^2}{(a+b-c)(a-b+c)}+\frac{x-b^2-c^2}{(c-a-b)(b-a-c)}=1$

-۲۵ $\frac{x}{a^{m-1}b^m}-\frac{x}{a^mb^{m-1}}=\frac{1}{b^m}-\frac{1}{a^m}$

-۲۶ $\frac{ax^{m+1}-x^m}{x-1}+\frac{bx^m}{x+1}=\frac{ax^m(x^2+1)}{x^2-1}$

معادلات زیررا حل وبحث‌کنید :

-۲۷ $(a-1)x+ab-4=0$

-۲۸ $(a+b-2)x+a-b-4=0$

-۲۹ $\frac{ax+2}{4x+3}=b$ -۳۰ $\frac{x+a}{3x+4}=b$

-۳۱ $(a-x)(b-x)=(a-x)(a-b)-(a+x)(b-x)$

-۳۲ $a(x-b)=b(a-x)-(a+b)x$

-۳۳ $\frac{a^2x+1}{a+1}=a^2-a+1$

-۳۴ $\frac{x+a}{a}-\frac{x-2a}{b}=3$

-۳۵ $\frac{x+a-b}{a}-\frac{x+b-a}{b}=\frac{b^2-a^2}{ab}$

-۳۶ $\frac{x}{b-a}+\frac{x}{2a}=\frac{b-a}{2a}$

-۳۷ $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2=1+ax$

-۳۸ $\frac{a(5x-14a)}{9a^2-x^2}=\frac{3a+x}{3a-x}+\frac{x-3a}{x+3a}$

-۳۹ $\frac{2(a+x)}{a(2x-a)}-\frac{x-2a}{3x+2a}=\frac{3a(a+5)-2x^2}{6x^2+ax-2a^2}+\frac{1}{a}$

معادلات اصم زیررا حل کنید :

-۴۰ $\sqrt{x^2+3}=x-5$

-۴۱ $\sqrt{x^2-3x-8}+4=x$

-۴۲ $x-\sqrt{x^2-3x+2}=3$

-۴۳ $\frac{x+2}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{x}=7$

-۴۴ $\sqrt{x}+2=\sqrt{x+24}$

-۴۵ $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1-2x}{1+2x}$

-۴۶ $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=1$

-۴۷ $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-4}+1=5$

-۴۸ $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}=2\sqrt{x+1}$

-۴۹ $\sqrt{x+17}+\sqrt{x-4}=7$

-۵۰ $5\sqrt{2x-1}=9+\sqrt{8x-4}$

-۵۱ $\sqrt{x+7}\pm\sqrt{x+5}\mp\sqrt{x+3}\mp\sqrt{x+2}=0$

-۵۲ $\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{3}{\sqrt{x}}$

-۵۳ $x+\sqrt{x(x-a)}=b$

-۵۴ $\frac{2x+a}{2x+b}+\sqrt{\frac{x+a}{x+b}}=0$

-۵۵ $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=c$

-۵۶ $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+a}=0$

-۵۷ $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}=\sqrt{x}+\sqrt{x+b}$

-۵۸ $\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}=a$

-۵۹ $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=b$

-۶۰ $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=1$

-۶۱ $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x-6+2\sqrt{5}}$

-۶۲ $\frac{x+2}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{x}-4=3$

-۶۳ $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$

-۶۴ $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$

-۶۵ $\sqrt{5x-3}+\sqrt{3x-2}=\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x-4}$

-۶۶ $\frac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}=2(\sqrt{a^2+x^2}+x)$

-۶۷ $x\sqrt{a^2+ab+b^2}=a\sqrt{x^2-b^2}+b\sqrt{x^2-a^2}\quad b>0,\ a>0$

۶۸- $\sqrt{x-2a}-\sqrt{x-2b}=2$

۶۹- $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{1}{x^2}}=mx$

۷۰- $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=(a+1)\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$

۷۱- $\sqrt{a^2+x\sqrt{x^2+b^2-a^2}}=x-a$

۷۲- $x=\sqrt{b-x}\times\sqrt{c-x}+\sqrt{c-x}\times\sqrt{a-x}+\sqrt{a-x}\times\sqrt{b-x}$

۷۳- $2\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}=\sqrt{a-x+\sqrt{x(a+x)}}$

۷۴- $\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=a$

۷۵- $\frac{2+x}{\sqrt{2}+\sqrt{2+x}}+\frac{2-x}{\sqrt{2}-\sqrt{2-x}}=\sqrt{2}$

فصل چهارم

نامساویها

۱ ـ دوعدد جبری مختلف(نامساوی) a و b رادرنظر می‌گیریم. هرگاه تفاضل ، $a-b$، مثبت باشد می‌گویند عدد a از عدد b بزرگتر است واین‌معنی رابه صورت $a>b$ می‌نویسند. به‌عکس، وقتی‌که تفاضل، $a-b$، منفی باشد می‌گویند a از b کوچکتر است و این معنی را به صورت $a<b$ می‌نویسند .

هر یك از صورتهای $a>b$ و $a<b$ را یك **نامساوی** و a و b را طرفین **نامساوی** می‌نامند .

می‌دانیم که کلیهٔ اعداد مثبت ازصفر بزرگترند وهرعدد مثبت‌از هرعدد منفی نیز بزرگتر است. بین‌دوعدد مثبت، آن‌که قدرمطلق‌بیشتر دارد بزرگتر است. جمیع اعداد منفی ازصفر کوچکترند وبین دوعدد منفی آن‌که قدر مطلق بیشتر دارد، کوچکتر است.

خواص‌اصلی نامساویها

۲ ـ قضیه ـ هرگاه برطرفین نامساوی عددی اضافه‌کنیم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند .

بنا به فرض $a>b$. می‌خواهیم ثابت کنیم که $a+c>b+c$.

از نامساوی $a>b$ معلوم می‌شود که $a-b$ عددی است مثبت؛ چنانچه به این عبارت ، عدد c اضافه و کم کنیم ، مقدار عبارت تغییری نمی‌کند . یعنی $a-b+c-c$ یا $(a+c)-(b+c)$ باز هم مثبت است؛ پس: $a+c>b+c$.

به همین طریق می‌توان ثابت کرد که اگر از طرفین نامساوی مقداری کم‌کنیم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند .

نتیجه ـ اگر جمله‌ای را از یك طرف نامساوی به طرف دیگر منتقل کنیم ، علامت آن جمله عوض می‌شود : زیرا اگر از طرفین نامساوی $a>b+c$ مقدار c را کم کنیم، بنا به‌قضیهٔ قبل چنین‌خواهیم داشت :

$$a-c>b+c-c$$

یا

$$a-c>b$$

۳ ـ قضیه ـ چند نامساوی متحدالجهت رابا حفظ جهت می‌توان جمع کرد .

اگر نامساویهای $a>b$ و $a'>b'$ مفروض‌باشند، $a-b$ و $a'-b'$ مثبتند ومجموع آنهانیز عددی است مثبت. یعنی

$$a-b+a'-b'>0$$

یا

$$a+a'>b+b'$$

۴ـ قضیه ـ هرگاه طرفین نامساوی رادر عددی مثبت ضرب کنیم جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.

فرض می‌کنیم $a<b$ و m عددی مثبت‌باشد .

از نامساوی $a<b$ نتیجه می‌گیریم که $(a-b)$ عددی است منفی ؛ پس اگر عدد منفی $(a-b)$ را در عدد مثبت m ضرب کنیم حاصل ضرب یعنی $(am-bm)$ منفی خواهد بود و از اینجا معلوم می‌شود : $am<bm$.

۵ ـ قضیه ـ هرگاه طرفین نامساوی را در عددی منفی ضرب‌کنیم جهت نامساوی تغییرمی‌کند .

فرض می‌کنیم $a>b$ و m عددی منفی‌باشد .

از نامساوی $a>b$ نتیجه می‌شود که $a-b$ عددی مثبت است. چنانچه این عبارت را در عدد منفی m ضرب کنیم ، حاصل ضرب یعنی $(am-bm)$ منفی خواهد شد. پس $am<bm$.

۶ ـ قضیه ـ هرگاه طرفین نامساوی‌رابرعددی مثبت‌تقسیم کنیم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند وچنانچه‌طرفین‌نامساوی‌را برعددی منفی‌تقسیم‌کنیم جهت‌نامساوی عوض‌می‌شود.

اگر طرفین نامساوی $a>b$ را در عدد مثبت $\frac{1}{m}$ ضرب کنیم چنین خواهیم داشت :

$$\frac{a}{m}>\frac{b}{m}$$

و چنانچه طرفین نامساوی را در عدد منفی $\frac{۱}{m}$ ضرب کنیم نتیجه می‌شود :

$$\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$$

ودر هردوحال، حکم ثابت است.

نتیجه ـ علامتهای طرفین نامساوی را می‌توان تغییر دادبه‌شرط آنکه جهت نامساوی را عوض‌کنیم .

۷ ـ قضیه ـ هرگاه طرفین‌نامساوی‌را به‌توان فردبرسانیم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند .

هرعددفرد را می‌توان به صورت $۲k+۱$ نوشت. چنانچه $a<b$ فرض شود، باید ثابت‌کنیم : $a^{۲k+۱}<b^{۲k+۱}$.

الف ـ اگر b و a مقادیری مثبت باشند حکم ثابت است.

ب ـ اگر b و a هر دومقادیری منفی باشند واضح است‌که‌قدر مطلق a ازقدر مطلق b بیشتر است: $|b|<|a|$. بنا به حالت قبل:

$$|a|^{۲k+۱}>|b|^{۲k+۱}$$

ویا

$$\left|a^{۲k+۱}\right|>\left|b^{۲k+۱}\right|$$

می‌دانیم هرعدد منفی وقتی‌که‌به‌توان فرد برسد حاصل آن منفی خواهدبود. واز دوعدد منفی، آن که قدر مطلق بیشتری داردکوچکتر ازدیگری است؛ پس: $a^{۲k+۱}<b^{۲k+۱}$

ج ـ هر گاه b و a مختلف‌العلامه باشند از نامساوی $a<b$ معلوم می‌شودکه a عددی است منفی و b مثبت است وتوان($۲k+۱$)ام عدد منفی a ، منفی خواهد شد. پس: $a^{۲k+۱}<b^{۲k+۱}$.

۸ـ قضیه ـ اگرطرفین‌نامساوی رابه توان زوج برسانیم:

الف ـ چنانچه‌طرفین‌نامساوی مقادیرمثبت‌باشند، جهت‌نامساوی تغییر نمی‌کند .

ب ـ چنانچه طرفین نامساوی مقادیرمنفی‌باشند ،جهت نامساوی عوض می‌شود .

ج ـ چنانچه طرفین نامساوی مختلف‌العلامه باشند، گاهی‌جهت نامساوی تغییر می‌کند و گاهی عوض نمی‌شود وگاهی‌نامساوی، به‌تساوی تبدیل می‌شود. اثبات‌آنهامانند اثبات‌قضیهٔ قبل‌است .

نامعادلهٔ‌یك مجهولی درجهٔ اول

۹ ـ هر دو عبارت جبری را که اقلاً یکی از آنها شامل یك یا چند حرف مجهول باشد و به وسیلهٔ علامات $<$ یا $>$ جدا شده باشند ، **نامعادله** گویند .

نامعادله‌ای که فقط یك حرف مجهول داشته باشد **نامعادلهٔ‌یك مجهولی** نامیده می‌شود.

مانند : $3x-1<4-2x$ یا $x>1-x$

چنانچه با نقل تمام جمله‌های نامعادلهٔ یك مجهولی به‌یك طرف وانجام اختصارات ممکن ، بزرگترین توان حرف مجهول برابرواحد باشد ، **نامعادله رایك مجهولی درجهٔ اول** ، گویند صورت کلی نامعادلات یك مجهولی درجهٔ اول چنین است.

$$ax+b>0 \quad \text{یا} \quad ax+b<0$$

(a ضریب جملهٔ درجهٔ اول و b جمله‌ای است ، مستقل از x).

هرعدد جبری راکه‌درنامعادلهٔ یك مجهولی‌جانشین حرف مجهول شود ونامعادله را به یك نامساوی **محقق** تبدیل کند ، **جواب نامعادلهٔ یك‌مجهولی** می‌نامند .

جواب نامعادله ، برخلاف معادلات ، هیچوقت یك‌یا چند عدد مشخص نیست ، بلکه مقادیری از حرف مجهول است که جملگی در نامعادله صدق می‌کنند؛ در حقیقت در نامعادلات ، حدی برای جوابها مشخص می‌شود ؛ مثلا در نامعادلهٔ : $3x-1<4-2x$ جمیع اعداد کوچکتر از یك مانند : ۰/۷ و ۰/۸ و صفر و ۱- و ۲- و ..... جواب نامعادله‌اند .

با استدلالی نظیر آنچه که درنامساویها گفته شد، می‌توان ثابت کردکه همان احکام ، در نامعادلات نیز صادق‌است .

مثال۱ ـ مطلوب است حل نامعادلهٔ : $2x+1>x-3$.

معلومات رابه یك طرف و مجهولات را به طرف دیگر نامساوی منتقل وسپس نامساوی راساده می‌کنیم :

$$2x-x>-3-1$$

$$x>-4$$

یعنی جمیع اعداد بزرگتر از (۴-) در نامعادلهٔ فوق صدق می‌کنند .

مثال۲ ـ مطلوب است حل نامعادلهٔ : $\frac{3x}{5}-12>\frac{x}{2}+2$.

برای حذف مخرج می‌توان طرفین نامساوی را درعدد مثبت۱۰ (کوچکترین‌مخرج مشترك) ضرب کرد :

$$6x-120>5x+20$$

$$6x-5x>120+20$$

$$x>140$$

پس جمیع اعداد بزرگتر از۱۴۰ جواب نامعادله‌اند .

مثال۳ ـ مطلوب است حل نامعادلهٔ : $3(x+1)<5x-6$

$$3x+3<5x-6$$

$$3x-5x<-6-3$$

$$-2x<-9$$

اگر طرفین نامساوی را بر ۲- تقسیم کنیم ، جهت نامساوی

عوض می‌شود ودر نتیجه چنین خواهیم داشت: $x>4/5$

۱۰ ـ حل دستگاه نامعادلات یك مجهولی درجهٔ اول :

مقصود از حل دستگاه نامعادلات، تعیین حدود مجهول است بطوری که درهر یك ازنامعادلات دستگاه صدق کند .

برای تعیین جواب دستگاه نامعادلات، هریك ازآنها راجداگانه حل کرده و جوابها را بدست می‌آوریم . از مقایسهٔ جوابها ، جواب دستگاه بدست می‌آید .

مثال۱ ـ مطلوب است حل دستگاه نامعادلات :

$$\begin{cases} 5x-6<3x-14 & (I) \\ \dfrac{7x+6}{2}<x+13 & (II) \end{cases}$$

از نامعادلهٔ(I) نتیجه‌می‌شود: $x<-4$ وازنامعادلهٔ (II)خواهیم داشت : $x<4$. طبق جدول زیر ، از مقایسهٔ جوابهای نامعادلات ، جوابهای دستگاه معین می‌شود :

−۴ ۰ +۴

جواب نامعادله (I)

جواب نامعادله (II)

پس جواب دستگاه ، جوابی است که در هر دو نامعادلهٔ (I) و (II) صدق می‌کند ، یعنی $x<-4$ جواب دستگاه است .

مثال۲ ـ مطلوب است حل‌دستگاه نامعادلات :

$$\begin{cases} 2x-5<x+3 & (I) \\ x+3<3x-9 & (II) \end{cases}$$

جواب نامعادلهٔ (I) ، $x<8$ وجواب نامعادلهٔ(II) ، $x>6$:

۶ ۸

جواب نامعادله (II)

جواب نامعادله (I)

پس‌جواب دستگاه اعداد واقع بین ۶ و ۸ است‌که به صورت $6<x<8$ نوشته می‌شود .

تعیین علامت دوجمله‌ای درجهٔ اول

۱۱ ـ هرگاه حاصل یك عبارت جبری پس از انجام عملیات لازم واختصارات ممکن ، شامل یك جمله‌از حرف مجهول با توان یك ویك جمله‌به‌صورت مقدارثابت(یعنی‌عدد) باشد، آن حاصل **دوجمله‌ای درجهٔ‌اول** نامیده می‌شود .

صورت کلی دوجمله‌ایهای درجهٔ اول ، $ax+b$ است که در آن a همیشه مخالف صفراست ولی b می‌تواند مساوی صفرهم‌باشد.

دوجمله‌ای $x-2$ رادر نظر می‌گیریم. این دو جمله‌ای به ازای $x=2$ برابر صفرمی‌شود .

عدد ۲ را **ریشهٔ دوجمله‌ای** می‌گویند . چنانچه به x اعدادی بزرگتر از ۲ مانند ۳ و۴ و . . . و $+\infty$ بدهیم ، حاصل $x-2$ همیشه مثبت است . هرگاه به x اعدادی کوچکتر از ۲ مانند ۱ و ۰

و ۱—و۲—و ..... و $\infty-$ بدهیم حاصل $x-2$ همواره منفی است ؛ به‌عبارت دیگر، دوجمله‌ای $x-2$ به‌ازای مقادیری از x که بزرگتر از ۲ (ریشهٔ دوجمله‌ای) باشند همواره مثبت است و به ازای جمیع مقادیر x که کوچکتر از ۲ باشند منفی‌است .

۱۲ - تعیین علامت دوجمله‌ای درجهٔ اول ax+b :

در دو جمله‌ای ax+b ابتدا از a فاکتور می‌گیریم :

$$ax+b=a(x+\frac{b}{a})$$

تساوی اخیر را نیز می‌توان چنین نوشت:

$$\text{(I)} \quad ax+b=a[x-(-\frac{b}{a})]$$

اما $-\frac{b}{a}$ ریشهٔ دوجمله‌ای ax+b است؛ زیرا:

$$ax+b=0$$
$$ax=-b$$
$$x=-\frac{b}{a}$$

پس رابطهٔ (I) چنین خواهد شد :

(II) $\boxed{ax+b=a(x-\text{ریشهٔ دوجمله‌ای})}$

در طرف دوم تساوی (II) ریشهٔ دو جمله‌ای درجهٔ اول عددی است مشخص، ولی به x می‌توان مقادیر بیشمار، از $(-\infty)$ تا $(+\infty)$، نسبت داد.

الف ـ اگر به x مقادیری بزرگتر از ریشهٔ دو جمله‌ای بدهیم، پرانتز طرف دوم تساوی (II) مثبت می‌شود ؛ در نتیجه دوجمله‌ای ax+b به ازای $a>0$ مثبت و به‌ازای $a<0$ منفی است.

پس : **علامت دوجمله‌ای ax+b به ازای جمیع مقادیر x ، بزرگتر از ریشهٔ دوجمله‌ای ، موافق علامت a یعنی موافق علامت ضریب جملهٔ درجهٔ اول است .**

ب ـ اگر به x مقادیری کوچکتر از ریشهٔ دوجمله‌ای نسبت دهیم، پرانتز نامبرده منفی خواهد شد ؛ در نتیجه دو جمله‌ای ax+b به ازای $a>0$ منفی و به ازای $a<0$ مثبت می‌شود.

بنابراین: **علامت دوجمله‌ای ax+b به‌ازای جمیع مقادیر x ، کوچکتر از ریشهٔ دوجمله‌ای، مخالف علامت a است.**

مثال۱ ـ علامت دوجمله‌ای $2x-4$ را تعیین‌کنید.

ابتدا دوجمله‌ای را مساوی‌صفر قرار می‌دهیم تاریشهٔ دو جمله‌ای بدست آید:

$$2x-4=0$$

واز آنجا : $x=2$

سپس به‌کمک جدول‌زیر، باتوجه‌به‌نتایج بالا، علامت دوجمله‌ای را تعیین می‌کنیم :

x	$-\infty$ ۲ $+\infty$
$2x-4$	— — — — — ۰ + + + + + +

دوجمله‌ای مفروض به‌ازای $2<x$ مثبت و به‌ازای $2>x$ منفی است.

مثال۴ ـ علامت عبارت $-4x$ راتعیین کنید.

عبارت مفروض دوجمله‌ای درجهٔ اول ناقصی است‌که در آن مقدار جملهٔ دوم (مقدار ثابت) برابر صفراست.

ریشهٔ این دوجمله‌ای $x=0$ است. پس مطابق نتایجی که‌قبلاً بدست آمد، جدول زیررا خواهیم داشت:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-4x$	+ + + +	0	− − − − − −

به ازای جمیع اعداد مثبت‌که به x نسبت داده شوند، دوجمله‌ای مفروض منفی‌است، و به‌ازای‌جمیع‌اعداد منفی‌که به x نسبت داده شوند، دوجمله‌ای مفروض مثبت است.

تبصرهٔ ۱ ـ اگر یك عبارت جبری به صورت حاصل ضرب دو جمله‌ایهای درجهٔ اول باشد یا آنکه بتوان آن را به چنین صورتی در آورد، برای تعیین علامت این قبیل عبارتها، کافی است ابتدا علامت هریك ازعوامل ضرب رامعین کنیم وسپس حاصل ضرب علامتها رابدست آوریم.

مثال ـ علامت عبارت $-2x^2+x$ رامعین کنید.

$$-2x^2+x=x(-2x+1)$$

علامت هر یك ازدو عامل x و $(-2x+1)$ را تعیین کرده وبا

درج این علامتها در جدولی به ترتیب زیر، علامت حاصل ضرب $x(-2x+1)$ را که همان علامت عبارت مفروض است، از ضرب علامتهای نامبرده معین می‌کنیم:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
x	− − − −	0 + + + +		+ + + +
$-2x+1$	+ + + +	+ + + +	0	− − − −
$-2x^2+x$	− − − −	0 + + + +	0	− − − −

به‌ازای مقادیر x محصور بین $\frac{1}{2}$ و ۰ یا $(0<x<\frac{1}{2})$ عبارت: $(-2x^2+x)$ مثبت است و به ازای $\begin{cases}x<0\\ x>\frac{1}{2}\end{cases}$ عبارت نامبرده منفی است.

تبصرهٔ ۲ ـ چون علامت هرکسر، ازتقسیم علامت صورت کسر برعلامت مخرج آن‌بدست می‌آید، در عبارات‌کسری باید علامت‌صورت ومخرج راتعیین کرد تابتوان علامت کسررا بدست‌آورد.

مثال ۱ ـ علامت کسر $\frac{2x-1}{2x+1}$ رابدست آورید.

صورت و مخرج کسر مفروض، هرکدام یك دو جمله‌ای درجهٔ اول هستند که با تعیین علامتهای آنها و تقسیم علامتهای تعیین شده

بریکدیگر ، علامت کسر مفروض بدست خواهد آمد .

ریشهٔ صورت $x=\frac{1}{2}$ و ریشهٔ مخرج $x=-\frac{1}{2}$ است و با تنظیم جدولی به ترتیب زیر، علامت کسر مفروض تعیین می‌شود :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$- - - - -$		$- - - - -$	0	$+ + + + +$	
$2x+1$		$- - - - - -$	0	$+ + +$		$+ + + + +$	
$\frac{2x-1}{2x+1}$		$+ + + +$	∞	$- - - -$	0	$+ + + + +$	

به ازای: $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ کسر مفروض منفی است و به ازای:

$$\left\{\begin{array}{l} x>\frac{1}{2} \\ x<-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

کسر نامبرده مثبت می‌شود .

مثال ۲ ـ علامت عبارت : $\frac{1-x}{1+x}+1$ را تعیین کنید .

در عبارت مفروض ، ابتدا کسر را با عدد جمع می‌کنیم ، حاصل می‌شود : $\frac{2}{1+x}$. چون صورت این کسر همواره مثبت است ، پس علامت کسر همان علامت دو جمله‌ای $x+1$ است که به ازای $x<-1$ منفی و به‌ازای $x>-1$ مثبت است .

۱۳ـ حل نامعادلات کسری :

الفـ ابتدا هریك ازکسرها را ساده می‌کنیم .

بـ پس از نقل تمام عبارتها به یك طرف ، مخرج مشترك می‌گیریم .

جـ علامت کسر حاصل را با تنظیم جدولی معین می‌کنیم .

دـ به کمك جدول نامبرده جواب نامعادله را مشخص می‌کنیم .

تبصره ـ در نامعادلات کسری ، برای حذف مخرج نمی‌توان طرفین نامساوی را در عبارتی شامل حرف مجهول ضرب کرد ، مگر آنکه آن عبارت به ازای جمیع مقادیر حرف مجهول ، مثبت باشد .

مثال ۱ـ مطلوب است حل نامعادلهٔ :

$$\frac{x-3}{x-2}-\frac{2x+1}{2x-4}>1$$

$$\frac{x-3}{x-2}-\frac{2x+1}{2(x-2)}-1>0$$

$$\frac{2(x-3)-(2x+1)-(2x-4)}{2(x-2)}>0$$

$$\frac{-2x-3}{2(x-2)}>0$$

برای تعیین علامت کسر اخیر ، باید علامت صورت یعنی $(-2x-3)$ و علامت مخرج یعنی $2(x-2)$ یا فقط $(x-2)$ را تعیین کرد ، تا علامت کسر بدست آید .

جدول زیر ، علامتهای صورت و مخرج کسر و درنتیجه علامت کسر و جواب نامعادله را روشن می‌سازد :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		2	$+\infty$
$-2x-3$	+ + +	0	− − −		− − − −
$x-2$	− − − − − −		− − −	0	+ + + +
$\frac{-2x-3}{2(x-2)}$	− − − − − −	0	+ + +	∞	− − − − − −

جواب نامعادله عبارت است از : $-\frac{3}{2}<x<2$

مثال ۲ـ مطلوب است حل نامعادلهٔ : $\frac{x^2-x+9}{x^2+5x+6}>1$

$$\frac{x^2-x+9}{x^2+5x+6}-1>0$$

$$\frac{-6x+3}{x^2+5x+6}>0$$

$$\frac{3(-2x+1)}{(x+3)(x+2)}>0$$

علامت صورت کسر اخیر ، همان علامت $(-2x+1)$ است و علامت مخرجش از حاصل ضرب علامتهای $(x+2)$ و $(x+3)$ بدست می‌آید وازجدولی‌که درصفحهٔ ۱۱۹ تنظیم شده ، علامت‌کسر وبالنتیجه جواب نامعادله معین می‌شود :

x	$-\infty$	-3		-2		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-2x+1$	+ + + +		+ + +		+ + +	0	− − − −
$x+3$	− − − −	0	+ + + +		+ + +		+ + + +
$x+2$	− − − −		− − −	0	+ + +		+ + + +
نتیجه	+ + + +	∞	− − −	∞	+ + +	0	− − − −

جواب نامعادله عبارت است از : $x<-3$ و $-2<x<\frac{1}{2}$.

تمرین

نامعادلات زیررا حل‌کنید :

ـ۱ $3x-10<7x$ ـ۲ $2x-6<x+1$

ـ۳ $\frac{x}{8}-6>\frac{x}{4}$ ـ۴ $6>\frac{2}{3}+2x$

ـ۵ $\frac{3}{4}-\frac{2x}{3}>\frac{x}{4}-\frac{1}{2}$ ـ۶ $\frac{5}{6}<\frac{1}{5}x+1$

ـ۷ $\frac{x-5}{2}+x>3-\frac{4-x}{2}$ ـ۸ $\frac{1+x}{3}+4-5x>\frac{2x}{9}$

ـ۹ $4-\frac{x}{2}+\frac{x}{3}<\frac{1+x}{2}-\frac{1+x}{3}$

ـ۱۰ $\frac{1}{x+2}>2-\frac{2(x-1)}{x-2}$

-۱۱ $\dfrac{2x+1}{1-x}>2$

-۱۲ $\dfrac{2x+3}{1-2x}<0$

-۱۳ $\dfrac{(2x-1)(x-1)}{2x-3}<0$

-۱۴ $(3x+5)(x+3)(3x-4)(7x-4)>0$

-۱۵ $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}>1$

-۱۶ $3x+20>(x+4)(x+5)$

-۱۷ $3>\dfrac{3x+4}{6x+5}>2$

-۱۸ $-1<\dfrac{3+2x}{4-3x}<1$

-۱۹ $\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}<0$

-۲۰ $(x+1)(x-2)<0$

-۲۱ $\dfrac{x+1}{x-2}<0$

-۲۲ $\dfrac{x^2-a^2}{x}<0$

نامعادلات زیررا دردوحالت $0<a$ و $0>a$ حل‌کنید :

-۲۳ $\dfrac{a}{2x-1}>0$

-۲۴ $\dfrac{x-1}{a}>\dfrac{x}{2}-3$

-۲۵ $\dfrac{(3ax+1)^3}{x-a}>0$

-۲۶ $\dfrac{ax+3}{ax-4a}<4$

-۲۷ $\dfrac{(a+x)^2-(a-x)^2}{4(a+x)}>0$

فصل پنجم

حل دستگاههای چند مجهولی درجهٔ اول

۱- معادله را چند مجهولی گویند ، وقتی‌که شامل بیش از یك حرف مجهول باشد . معادلهٔ : $2x+3y=6$ معادله‌ای‌است دومجهولی ولی معادلهٔ: $\frac{3x-4}{2}=\frac{x}{2}-(1+x)2$ چون‌فقط شامل‌حرف مجهول x است ، معادله‌ای یك مجهولی است .

چنانچه معادله دارای n مجهول باشد ، معادله را n مجهولی می‌گویند . اگر چند معادلهٔ چند مجهولی داشته باشیم و یك یا چند مقدار معین و مشخص از هر مجهول در همگی آن معادله‌ها صدق کند ، آن چند معادله با هم تشکیل یك دستگاه می‌دهند . معادلات $2x+y=12$ و $5x-4y=17$ یك دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی تشکیل می‌دهند . زیرا منحصراً مقادیر $x=5$ و $y=2$ درهردومعادله صدق می‌کنند . اعداد ۵ و ۲ را **جواب دستگاه** می‌گویند .

مقصود از حل یك دستگاه چند معادلهٔ چند مجهولی ، تعیین مقادیر مجهولات است بطوری که در هر یك از معادلات دستگاه صدق کنند .

۲ - **حل‌دستگاه چندمعادلهٔ چندمجهولی** - می‌توان از یك معادله، یکی ازحروف مجهول را بر حسب حروف مجهول دیگر پیدا کرد و در سایر معادلات به جای آن حرف‌مجهول ، مساویش را قرار داد. به این ترتیب با حذف یکی از مجهولات ، از تعداد مجهولات و معادلات یکی‌کم می‌شود. چنانچه این عمل را ادامه دهیم، به‌یك‌معادلهٔ یك مجهولی می‌رسیم‌که‌بسهولت قابل‌حل است .

همینکه مقدار مجهول معادلهٔ نهایی بدست آمد ، به کمك این مقدار متدرجاً مقدار سایر مجهولات دستگاه رامعلوم می‌کنیم .

می‌توان مقدار جبری‌ضرایب یك مجهول رادر معادلات، دوبدو متحدکرد. برای این‌کار ، دو معادله را در دو عدد جبری مناسب ضرب می‌کنیم تامقدار جبری ضرایب متساوی شوند .

پس‌ازآنکه مقدار جبری ضرایب یك حرف‌مجهول در دومعادله متساوی شدند، دو معادله راعضو بعضو ازیکدیگر تفریق می‌کنیم‌تا آن حرف مجهول حذف شود.

از این‌طریق نیز باحذف یك حرف مجهول، از تعداد مجهولات ومعادلات یکی کاسته می‌شود وبا ادامهٔ همین رویه می‌توانیم تدریجاً از تعداد مجهولات‌ومعادلات بکاهیم‌تابالاخره مانند حالت قبل به‌یك‌معادلهٔ یك مجهولی برسیم وباتعیین‌مجهول آخرین معادله، حل‌دستگاه‌را مانند حالت قبل بپایان رسانیم.

I - دستگاههای دومجهولی درجهٔ اول:

الف - دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ اول زیر را حل کنید :

$$(E)\quad \begin{cases} 3x+4y=18 \\ 2x-5y=-11 \end{cases}$$

$$x=\frac{18-4y}{3}$$

$$2\left(\frac{18-4y}{3}\right)-5y=-11$$

پس از اختصار ، $y=3$. این مقدار y را در یکی از معادلات دستگاه (E) ، مثلاً درمعادلهٔ اول دستگاه ، به جای y قرار می‌دهیم و x را بدست می‌آوریم :

$$3x+4\times 3=18$$

$$3x=6$$

$$x=2$$

دراین طرز عمل،می‌گویند دستگاه (E) به **«طریقهٔ تبدیلی»** حل شده و مجهول x به طریقهٔ تبدیلی از معادلهٔ دستگاه (E) حذف شده است **(حذف تبدیلی)**.

ب - دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی درجهٔ اول زیرراحل‌کنید:

$$(E')\quad \begin{cases} 3x-2y=4 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$$

معادلهٔ اول دستگاه (E') رادر ۲ ومعادلهٔ دومش را در ۳ ضرب

می‌کنیم تاضرایب x دردو معادله برابر شوند. ازتفریق معادلات‌حاصل، x حذف می‌شود و y بدست می‌آید:

$$\begin{cases} ۶x-۴y=۸ \\ ۶x+۹y=۲۱ \end{cases}$$

$$-۱۳y=-۱۳$$

$$y=۱$$

$$x=۲$$

بااین نحوهٔ عمل می‌گویند دستگاه (E') به**«طریقهٔ تحویلی»** حل شده و مجهول x ، بین دو معادله دستگاه (E') به طریقهٔ تحویلی حذف شده است **(حذف‌تحویلی)** .

ج ـ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ اول زیرراحل‌کنید:

$$(E'') \qquad \begin{cases} ۴x-۵y=۱۳ \\ ۲x+۳y=۱ \end{cases}$$

از معادلات اول و دوم دستگاه (E'') مقدار x را بر حسب y حساب می‌کنیم ودومقدار x را که به این ترتیب بدست می آید مساوی هم قرار می‌دهیم تا معادله‌ای یک‌مجهولی تشکیل شود :

$$۴x=۱۳+۵y$$

$$\boxed{x=\frac{۱۳+۵y}{۴}}$$

$$۲x=۱-۳y$$

$$\boxed{x=\frac{۱-۳y}{۲}}$$

$$\frac{۱۳+۵y}{۴}=\frac{۱-۳y}{۲}$$

$$۱۳+۵y=۲-۶y$$

$$۱۱y=-۱۱$$

$$y=-۱$$

$$x=۲$$

با این ترتیب که عمل شد ، می‌گویند دستگاه (E'') به **«طریقهٔ قیاسی»** حل‌شده و مجهول x بین دومعادلهٔ دستگاه (E'') به طریقهٔ قیاسی حذف شده است **(حذف‌قیاسی)**.

د ـ حل دستگاه دومعادلهٔ دو مجهولی درجهٔ اول به‌کمک قاعدهٔ کرامر (Cramer) :

یک دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ اول را همیشه می‌توان به صورت کلی زیر نوشت :

$$(E_{۱}) \qquad \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

در دستگاه $(E_{۱})$ ، حروف a و b و c و a' و b' و c' نمایش اعداد معلومند که ممکن است مثبت یا منفی یا صفر باشند . اعداد a و b و a' و b' ضرایب حروف مجهول x و y هستند و c و c' جمله‌های معلوم دستگاه نامیده می‌شوند.

اگر دستگاه (E_1) را به طریقهٔ حذف تحویلی حل کنیم چنین خواهیم داشت :

$$\begin{cases} aa'x+ba'y=ca' \\ aa'x+ab'y=ac' \end{cases}$$

$$(ab'-ba')y=ac'-ca'$$

و از آنجا :

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'} \qquad (E_2)$$

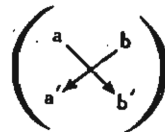
به همین ترتیب مقدار x به صورت زیر بدست می‌آید :

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'} \qquad (E_3)$$

دستورهای (E_2) و (E_3) را با ضبط و حفظ قاعدهٔ زیر ، منسوب به **کرامر** ، بسهولت می‌توان نوشت :

قاعدهٔ کرامر:

در طرف دوم دستورهای (E_2) و (E_3) ، که بترتیب مقادیر دو مجهول y و x را بدست می‌دهند ، برای نوشتن مخرج کافی است ضرایب (a و b') را از طرفی و ضرایب (a' و b) را از طرف دیگر صلیب‌وار در هم ضرب کرده و حاصل ضرب دوم را از حاصل ضرب اول کم کنیم .



اگر در این مخرج به جای حروف a و a' بترتیب حروف c و c' را قرار دهیم ، صورت کسری که مقدار x را بدست می‌دهد حاصل خواهد شد .

همچنین صورت کسری که مقدار y را بدست می‌دهد به این ترتیب حاصل می‌شود که در مخرج نامبرده حروف c و c' را بترتیب جانشین b و b' کنیم .

مثال ـ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ اول زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} ۳x+۴y=۱۸ \\ ۲x-۵y=-۱۱ \end{cases}$$

دستگاه مفروض را به کمك دستورهای (E_2) و (E_3) وطبق قاعدهٔ **کرامر** باتوجه به‌مقادیر جبری a و b و c و a' و b' و c' به شرح زیر حل می‌کنیم :

$$a=۳ \quad b=۴ \quad c=۱۸$$
$$a'=۲ \quad b'=-۵ \quad c'=-۱۱$$

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}=\frac{۱۸(-۵)-۴(-۱۱)}{۳(-۵)-۴\times۲}=\frac{-۴۶}{-۲۳}=۲$$

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}=\frac{۳(-۱۱)-۱۸\times۲}{۳(-۵)-۴\times۲}=\frac{-۶۹}{-۲۳}=۳$$

بحث :

اولاً ـ اگر مقدار $(ab'-ba')$ مخالف‌صفر باشد، دستگاه (E_1)

منحصراً دارای یك جواب برای هر یك از دو مجهول x و y خواهد بود و مقدار جوابها از دو دستور (E_3) و (E_2) بدست خواهد آمد.

به عبارت دیگر باشرط:

$$ab'-ba'\neq 0$$

یا

$$ab'\neq ba'$$

یا

$$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$$

دستگاه (E_1) منحصراً دارای یك جواب برای هریك ازدو مجهول x و y خواهد بود.

ثانیاً ـ اگرمقدار $ab'-ba'=0$ یعنی $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ باشد دو حالت ممکن است اتفاق افتد:

حالت اول ـ $ac'-ca'\neq 0$ ودرنتیجه $\frac{a}{a'}\neq\frac{c}{c'}$؛ در این صورت دستگاه (E_1) ممتنع است؛ بطور خلاصه با شرط: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ دستگاه (E_1) ممتنع است.

حالت دوم ـ $ac'-ca'=0$ ودرنتیجه $\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}$؛ در این صورت دستگاه (E_1) مبهم است؛ بطور خلاصه با شرط: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ دستگاه (E_1) مبهم است وجوابهای بیشمار دارد.

ثالثاً ـ اگر ضرایب a و a' و b و b' همگی صفر باشند نیز

دوحالت تشخیص می‌دهیم:

حالت اول ـ یکی‌از ضرایب c یا c' مخالف صفر است؛ دراین صورت دستگاه (E_1) ممتنع است.

حالت دوم ـ $c=c'=0$؛ در این صورت دستگاه (E_1) مبهم است.

درجدول زیر، حالات مختلف این‌بحث خلاصه‌شده است:

دستگاه (E_1) دارای جواب است. $ab'-ba'\neq 0$

$ab'-ba'=0$	$a\neq 0$	$ac'-ca'\neq 0$ دستگاه (E_1) ممتنع‌است
		$ac'-ca'=0$ دستگاه (E_1) مبهم است
	$a=a'=b=b'=0$	c یا $c'\neq 0$ دستگاه (E_1) ممتنع‌است
		$c=c'=0$ دستگاه (E_1) مبهم است

۵ ـ دستگاه همگن (Homogène) ـ معادله‌ای را همگن گویند، وقتی‌که تمام جمله‌های آن نسبت به حروف مجهول هم درجه باشند. معادلات: $2x+3y=0$ و $x^2-2xy+y^2=0$ نسبت به حروف x و y همگن هستند. (تمام جمله‌های معادلهٔ اول نسبت به x و y از درجهٔ اول و تمام جمله‌های معادلهٔ دوم نسبت به x و y ازدرجهٔ دومند).

دستگاههایی به صورت: $\begin{cases} ax+by=0 \\ a'x+b'y=0 \end{cases}$ راهمگن می‌نامند.

اگر $ab'-ba'\neq 0$ باشد ، تنها جواب دستگاه، $x=y=0$ است .

چنانچه $ab'-ba'=0$ باشد دستگاه مبهم است .

II ـ دستگاههای چند مجهولی درجهٔ اول :

الف ـ دستگاه سه‌معادلهٔ سه‌مجهولی درجهٔ اول زیررا حل‌کنید:

$$(A)\qquad \begin{cases} x+2y-4z=24 \\ 2x-y+3z=-11 \\ 3x+2y+z=8 \end{cases}$$

اگر معادلهٔ دوم دستگاه (A) را در۲ ضرب‌کنیم وبامعادلات اول وسوم همین دستگاه جمع کنیم y حذف می‌شود :

$$\begin{cases} 4x-2y+6z=-22 \\ x+2y-4z=24 \end{cases}$$

$$(B)\qquad 5x+2z=2$$

$$\begin{cases} 4x-2y+6z=-22 \\ 3x+2y+z=8 \end{cases}$$

$$7x+7z=-14$$

یا

$$(C)\qquad x+z=-2$$

از معادلات (B) و (C) ، دستگاه زیر بدست می‌آید که از حل آن مقدار x و z معلوم می‌شود :

$$(D)\qquad \begin{cases} 5x+2z=2 \\ x+z=-2 \end{cases}$$

$$(E)\qquad \begin{cases} 5x+2z=2 \\ 2x+2z=-4 \end{cases}$$

$$3x=6$$

$$\boxed{x=2}$$

$$x+z=-2$$

$$2+z=-2$$

$$\boxed{z=-4}$$

$$3x+2y+z=8$$

$$6+2y-4=8$$

$$2y=6$$

$$\boxed{y=3}$$

ب ـ دستگاه زیر راحل‌کنید :

$$(A)\qquad \begin{cases} x+2y-3z+4u=31 \\ 3x+3y-4z-u=8 \\ 2x-y-5z+3u=13 \\ 2x+2y-z+u=17 \end{cases}$$

معادلهٔ اول دستگاه (A) رادر ۲ ضرب کرده واز معادلهٔحاصل، معادلات سوم وچهارم دستگاه (A) راتفریق می‌کنیم :

$$\begin{array}{r} ۲x+۴y-۶z+۸u=۶۲ \\ ۲x-y-۵z+۳u=۱۳ \\ \hline \end{array}$$

$$(B) \qquad ۵y-z+۵u=۴۹$$

$$\begin{array}{r} ۲x+۴y-۶z+۸u=۶۲ \\ ۲x+۲y-z+u=۱۷ \\ \hline \end{array}$$

$$(C) \qquad ۲y-۵z+۷u=۴۵$$

بار دیگر ، معادلهٔ اول دستگاه (A) را در ۳ ضرب کرده و از معادلهٔ حاصل، معادلهٔ دوم دستگاه(A) را تفریق می‌کنیم :

$$\begin{array}{r} ۳x+۶y-۹z+۱۲u=۹۳ \\ ۳x+۳y-۴z-u=۸ \\ \hline \end{array}$$

$$(D) \qquad ۳y-۵z+۱۳u=۸۵$$

از ترکیب معادلات (B) و (C) و (D) ، دستگاه (A′) را که فاقد مجهول x و فقط شامل سه مجهول y و z و u می‌باشد به صورت زیر تشکیل می‌دهیم :

$$(A') \begin{cases} ۵y-z+۵u=۴۹ \\ ۲y-۵z+۷u=۴۵ \\ ۳y-۵z+۱۳u=۸۵ \end{cases}$$

معادلهٔ اول دستگاه (A′) رادر۵ ضرب کرده وازمعادلهٔ حاصل، معادلهٔ سوم دستگاه (A′) راتفریق می‌کنیم :

$$\begin{array}{r} ۲۵y-۵z+۲۵u=۲۴۵ \\ ۳y-۵z+۱۳u=۸۵ \\ \hline ۲۲y+۱۲u=۱۶۰ \end{array}$$

یا

$$(E) \qquad ۱۱y+۶u=۸۰$$

معادلهٔ دوم دستگاه (A′) را نیز از معادلهٔ سوم همین دستگاه کم می‌کنیم :

$$\begin{array}{r} ۳y-۵z+۱۳u=۸۵ \\ ۲y-۵z+۷u=۴۵ \\ \hline \end{array}$$

$$(F) \qquad y+۶u=۴۰$$

از ترکیب معادلات (E) و (F) ، دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی (A″) که شامل دو مجهول y و u است به‌صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$(A'') \begin{cases} ۱۱y+۶u=۸۰ \\ y+۶u=۴۰ \end{cases}$$

معادلهٔ دوم دستگاه (A″) را از معادلهٔ اول همین دستگاه تفریق می‌کنیم :

$$۱۰y=۴۰$$

$$\boxed{y=۴}$$

حال در معادلهٔ دوم دستگاه (A″) به‌جای y مقدارش را قرار داده واز معادلهٔ حاصل، مقدار u را بدست می‌آوریم :

$$۴+۶u=۴۰$$

$$۶u=۳۶$$

$$\boxed{u=۶}$$

در یکی از معادلات دستگاه (A') ، مثلاً در معادلهٔ اول این دستگاه ، به جای y و u مقادیرشان را قرار داده و از معادلهٔ حاصل مقدار z را حساب می‌کنیم :

$$۲۰-z+۳۰=۴۹$$

$$\boxed{z=۱}$$

بالاخره در یکی ازمعادلات دستگاه (A) ، مثلا در معادلهٔ اول این دستگاه ، به جای y و z و u مقادیرشان را جانشین کرده و از معادلهٔ حاصل مقدار x را تعیین می‌کنیم :

$$x+۸-۳+۲۴=۳۱$$

$$\boxed{x=۲}$$

۳ ـ حل دستگاه معادلات چند مجهولی به‌کمک مجهول معاون : در حل پاره‌ای معادلات (کسری یااصم) پس‌ازحذف مخرجها یارادیکالها وانجام اختصارات ممکن ، معادلاتی از درجهٔ دوم و بالاتر حاصل می‌شود که‌گاهی حل آنها غیرممکن بنظر می‌رسد.

اگر بتوانیم عباراتی راکه شامل مجهولات اصلی است ، مجهول

جدید قرار دهیم بطوری که معادلات حاصل : اولاً ـ شامل مجهولات اصلی نباشند. ثانیاً ـ از درجهٔ دوم وبالاتر نباشند، این مجهول جدید را **مجهول‌معاون** می‌گویند .

مثال ـ مطلوب است حل‌دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی :

$$(I)\begin{cases}\dfrac{۲x}{۳x-y+۱}+\dfrac{۳y}{۲x-۳y+۲}=-\dfrac{۱}{۳}\\[2mm]\dfrac{۳x}{۳x-y+۱}-\dfrac{۴y}{۲x-۳y+۲}=\dfrac{۷}{۳}\end{cases}$$

فرض می‌کنیم :

$$(II)\begin{cases}\dfrac{x}{۳x-y+۱}=A\\[2mm]\dfrac{y}{۲x-۳y+۲}=B\end{cases}$$

باشد؛ بنابراین فرض، دستگاه(I) به صورت زیردرمی‌آید:

$$(III)\begin{cases}۲A+۳B=-\dfrac{۱}{۳}\\[2mm]۳A-۴B=\dfrac{۷}{۳}\end{cases}$$

ازحل دستگاه (III) نتیجه می‌شود :

$$\boxed{\begin{array}{l}A=\dfrac{۱}{۳}\\[2mm]B=-\dfrac{۱}{۳}\end{array}}$$

حال دردستگاه (II) به جای A و B مقادیرشان را قرارمی‌دهیم تادستگاه (IV) به‌صورت زیر حاصل شود:

$$(IV)\begin{cases}\dfrac{x}{3x-y+1}=\dfrac{1}{3}\\[2mm]\dfrac{y}{2x-3y+2}=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

دستگاه (IV) پس ازحذف مخرجها چنین می‌شود :

$$(V)\begin{cases}3x=3x-y+1\\3y=-2x+3y-2\end{cases}$$

واز دستگاه (V) مقادیر x و y به صورت زیر بدست می‌آید :

$$\boxed{\begin{matrix}x=-1\\y=1\end{matrix}}$$

تمرین :

دستگاههای دومعادلهٔ دومجهولی زیرراحل‌کنید :

-۱ $\begin{cases}3x+4y=2\\2x-5y=9\end{cases}$

-۲ $\begin{cases}3x-2y=-13\\6x+5y=10\end{cases}$

-۳ $\begin{cases}2a+12b=7.88\\35a-b=-9.8\end{cases}$

-۴ $\begin{cases}17x-14y=291\\13x+8y=129\end{cases}$

-۵ $\begin{cases}0.3x+0.7y=-11\\0.8x-0.5y=18\end{cases}$

-۶ $\begin{cases}\dfrac{x}{8}-\dfrac{y}{3}=-1\\[2mm]\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{9}=9\end{cases}$

-۷ $\begin{cases}\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5}\\[2mm]3x+4y=7\end{cases}$

-۸ $\begin{cases}\dfrac{3x}{2}-\dfrac{4y}{3}+1=8x-\dfrac{1}{2}-y\\[2mm]\dfrac{x-3}{4}+\dfrac{3y}{2}-3x=4-\dfrac{3x}{2}+6x\end{cases}$

-۹ $\begin{cases}\dfrac{3x-2y}{3}-\dfrac{x-5y}{7}+1=0\\[2mm]\dfrac{7x-y}{6}+\dfrac{x-2y}{3}=1\end{cases}$

-۱۰ $\begin{cases}\dfrac{2x+y}{a}+\dfrac{y-2x}{1}=\dfrac{2(a^2+1)}{a}\\[2mm]\dfrac{5x+3y}{5}-\dfrac{3x-y}{a}=\dfrac{a^2+36a-5}{10a}\end{cases}$

مطلوب است حل دستگاههای زیر:

-۱۱ $\begin{cases}5x-3y+2z=19\\4x+5y-3z=31\\3x+7y-4z=31\end{cases}$

-۱۲ $\begin{cases}2x+5y+3z=17\\3x-2y-z=12\\5x+3y-2z=18\end{cases}$

-۱۳ $\begin{cases}2x+y+1=0\\2y-z+13=0\\x-2z+7=0\end{cases}$

-۱۴ $\begin{cases}2x+y-3z=-3\\x-2y-6z=7\\5x+3y+9z=-4\end{cases}$

-۱۵ $\begin{cases}5x+3y-z=-4\\x-2y+3z=3\\3x+4y-2z=-2\end{cases}$

-۱۶
$$\begin{cases} 4x+3y-2z=-1 \\ 2x+4y+3z=1 \\ 3x-2y-4z=1 \end{cases}$$

-۱۷
$$\begin{cases} 2x+y-z=-3 \\ 3y+2z=-5 \\ -5x+4z=4 \end{cases}$$

-۱۸
$$\begin{cases} \frac{3x}{2}-y+\frac{2z}{3}=4 \\ \frac{x}{3}+\frac{5y}{2}-\frac{z}{6}=\frac{8}{3} \\ \frac{x}{6}-\frac{2y}{3}+\frac{z}{9}=0 \end{cases}$$

-۱۹
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}z+\frac{1}{4}y=3 \\ \frac{1}{2}z-\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}x=-5 \\ \frac{1}{6}x-\frac{1}{8}y+\frac{2}{3}z=-4 \end{cases}$$

-۲۰
$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=3+4t \\ z=5t-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$$

-۲۱
$$\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{2}{z}-\frac{3}{y}=0 \\ \frac{2}{z}+\frac{1}{x}=\frac{4}{3} \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{2}{5} \end{cases}$$

-۲۲
$$\begin{cases} \frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+1}{5} \\ x-y+z=1 \end{cases}$$

-۲۳
$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-y-z-t=3 \\ x-2y-3z+t=-2 \\ 3x-2y-z+2t=3 \end{cases}$$

-۲۴
$$\begin{cases} 2x+y-z=-3 \\ y-2z-t=-2 \\ x+3t=-4 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$$

-۲۵
$$\begin{cases} \frac{x+2y}{5x+6z}=\frac{7}{9} \\ \frac{3y+4x}{x+2y}=\frac{8}{7} \\ x+y+z=128 \end{cases}$$

-۲۶
$$\begin{cases} 3x+2y-4z+t=2 \\ 2x+3y-z-4t=0 \\ -x+4y-2z-3t=-2 \\ 4x+3z-2t=4 \end{cases}$$

-۲۷
$$\begin{cases} \frac{5x+7y}{x+y}=6 \\ \frac{3(z-x)}{x-y+z}=1 \\ \frac{2x+3y-z}{\frac{x}{2}+3}=4 \end{cases}$$

-۲۸
$$\begin{cases} 4x-3z=10 \\ 2y-5u=5 \\ z+3u=19 \\ 4x+y=11 \end{cases}$$

مطلوب است حل وبحث دستگاههای زیر :

-۲۹
$$\begin{cases} mx+2y=m \\ 2x+my=2 \end{cases}$$

-۳۰
$$\begin{cases} mx-2y=m \\ (m-1)x-y=1 \end{cases}$$

-۳۱
$$\begin{cases} (m-1)x+(3m-2)y=2 \\ (2m-1)x-2y=m+2 \end{cases}$$

-۳۲
$$\begin{cases} 2x-(m+6)y=m-8 \\ (3m-1)x+(2m+3)y=m+4 \end{cases}$$

-۳۳
$$\begin{cases} mx+2y=3 \\ (m-1)x+3y=2 \end{cases}$$

-۳۴
$$\begin{cases} (m-1)^2x+(m^2-1)y=(m+1)^2 \\ (2m-1)x+(m+1)y=m^2-1 \end{cases}$$

-۳۵

$$\begin{cases}(a-b)x+(a+b)y=a\\(a^2-b^2)x+(a^2+b^2)y=a^2\end{cases}$$

-۳۶ m و n را بطریقی تعیین کنید که جوابهای دستگاه زیر $x=3$ و $y=-3$ باشد :

$$\begin{cases}(3m+2n)x-(m-1)y=4m-3n+1\\(2m+n-1)x+(m+n-1)y=4m-n+2\end{cases}$$

دستگاههای زیررا حل‌کنید :

-۳۷

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}\\\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{20}\\\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15}\end{cases}$$

-۳۸

$$\begin{cases}\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}=m\\\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=n\end{cases}$$

-۳۹

$$\begin{cases}a(x+y)-b(x-y)=2a\\a(x-y)-b(x+y)=2b\end{cases}$$

-۴۰

$$\begin{cases}\frac{1}{3x-2y+1}+\frac{1}{x+2y-3}=\frac{5}{12}\\\frac{1}{2y+x-3}-\frac{1}{3x-2y+1}=\frac{1}{12}\end{cases}$$

-۴۱

$$\begin{cases}\frac{4}{x+2y+1}+\frac{3}{2x+3y+4}=-\frac{13}{3}\\\frac{3}{x+2y+1}-\frac{1}{2x+3y+4}=0\end{cases}$$

-۴۲

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5\\\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2xy\end{cases}$$

-۴۳

$$\begin{cases}\frac{xy}{ay+bx}=c\\\frac{xz}{az+cx}=b\\\frac{yz}{bz+cy}=a\end{cases}$$

-۴۴

$$\begin{cases}\frac{xy}{x+y}=\frac{12}{5}\\\frac{yz}{y+z}=\frac{18}{5}\\\frac{xz}{x+z}=\frac{36}{13}\end{cases}$$

-۴۵

$$\begin{cases}\frac{xy}{5x+4y}=6\\\frac{xz}{3x+2z}=8\\\frac{yz}{3y+5z}=6\end{cases}$$

فصل ششم

حل و بحث مسائل درجهٔ اول

در حل مسائل فکری از طریق جبر ، باید نکات زیر را مورد توجه قرار داد :

الف ـ انتخاب مجهول. ب ـ نوشتن معادلات .

ج ـ حل معادلات. د ـ بحث.

الف ـ در مورد انتخاب مجهول اکثراً می‌توان ازصورت مسائل استفاده کرد .

چنانچه در صورت مسائل بطور صریح قید نشده باشد ، باید مجهول را طوری انتخاب کرد که بسهولت بتوان به نتیجهٔ مطلوب رسید .

پس از آنکه مجهول یامجهولات مسئله انتخاب شدند ، آنها را به‌حروف x و y و z و .... نمایش می‌دهند .

ب ـ نوشتن معادله یا معادلات مسئله یعنی نوشتن رابطه یا روابطی که مجهول یا مجهولات انتخاب شده، با اجابت شرایط منظور در مسئله ، در آن روابط صدق کنند ؛ این روابط ممکن است با

استفاده از مفروضات و معلومات مسئله یا با بکار بردن بعضی خواص جبری یا هندسی نوشته شوند ؛ تعداد معادلات ، باید همیشه برابر با تعداد مجهولات مسئله باشد .

ج ـ پس از آنکه معادلات مسئله نوشته شدند، آنها را بطوری که در حل معادلات یك مجهولی درجهٔ اول و حل معادلات اصم و دستگاههای درجهٔ اول دیده‌ایم حل می‌کنیم .

د ـ بعد از حل معادلات و تعیین جوابهای آنها ، باید تحقیق کرد که کدامیك از جوابها قابل قبولند ،یعنی باید تحقیق کرد که کدامیك از جوابها درهمهٔ شرایط مسئله صدق می‌کنند .

مثال۱ ـ تخم مرغ فروشی ۵ عدد کمتر از $\frac{2}{9}$ تخم‌مرغهایش را فروخت . پیش خود حساب کرد که اگر به باقیماندهٔ تخم مرغها ۳۷ عدداضافه کند، به‌اندازهٔ $\frac{1}{6}$ تخم‌مرغهای اولیه بیشتراز تخم‌مرغهای قبل از فروش خواهد داشت . تعیین کنید تعداد تخم مرغهای این شخص را .

حل ـ اگر تعدادتخم مرغها را x فرض‌کنیم، تعداد تخم‌مرغهای فروش رفته $(\frac{2}{9}x-5)$ می‌شودوباقیماندهٔ تخم مرغها: $x-(\frac{2}{9}x-5)$ عدد خواهد بود و طبق صورت مسئله باید این باقیمانده به اضافهٔ ۳۷ به‌اندازهٔ x (تعداد قبل ازفروش) به اضافهٔ $\frac{1}{6}$ تعداد اولیه (یعنی

$\frac{x}{6}$) باشد ؛ پس معادلهٔ مسئله به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$(I)\quad x-\left(\frac{2}{9}x-5\right)+37=x+\frac{x}{6}$$

حال معادلهٔ (I) را با انجام عملیات لازم و اختصارات ممکن به ترتیب زیر حل می‌کنیم :

$$-\frac{2}{9}x+5+37=\frac{x}{6}$$

$$\frac{x}{6}+\frac{2x}{9}=42$$

$$3x+4x=756$$

$$7x=756$$

$$\boxed{x=108}$$

پس تعداد تخم مرغها ۱۰۸ عدد بوده است .

مثال ۲ ـ پدری دارایی خود را بین فرزندانش به این ترتیب تقسیم می‌کند : به پسر اول (بزرگتر از همه) یکهزار ریال به اضافهٔ $\frac{1}{7}$ بقیهٔ دارایی خود و به پسر دوم ۲۰۰۰ ریال به اضافهٔ $\frac{1}{7}$ باقیمانده .... چنانچه سهم تمام فرزندان متساوی باشد ، معین کنید دارایی پدر وسهم هریك ازفرزندان وعدهٔ آنها را .

حل ـ اگر دارایی پدر را x ریال فرض کنیم ، سهم پسر اول

خواهد شد :

سهم پسراول $\quad 1000+(x-1000)\frac{1}{7}=\frac{6000+x}{7}$

برای محاسبهٔ سهم پسردوم باید در وهلهٔ اول، باقیماندهٔ دارایی پدر را پس از پرداختن سهم پسر اول تعیین کنیم (باقیماندهٔ اول) که مقدار این باقیمانده چنین می‌شود :

باقیماندهٔ اول : $\quad x-\frac{6000+x}{7}=\frac{6x-6000}{7}$

سپس باید از این باقیماندهٔ اول ، ۲۰۰۰ ریالی را که به پسر دوم داده شده کم کنیم وبا تعیین باقیماندهٔ دوم ، $\frac{1}{7}$ آن را اختیار کرده و حاصل را به ۲۰۰۰ ریال بیفزاییم تا سهم پسر دوم بدست‌آید :

باقیماندهٔ دوم : $\quad \frac{6x-6000}{7}-2000=\frac{6x-20000}{7}$

سهم پسردوم : $\quad 2000+\left(\frac{6x-20000}{7}\right)\frac{1}{7}=\frac{6x+78000}{49}$

چون بنا بر فرض مسئله سهم پسرها متساوی است ، پس معادلهٔ مسئله چنین می‌شود :

$$(I)\qquad \frac{6000+x}{7}=\frac{6x+78000}{49}$$

ازحل معادلهٔ (I) دارایی پدر پیدا می‌شود :

$$42000+7x=6x+78000$$

دارایی پدر : $x=۳۶۰۰۰$ ریال

وسهم پسر بزرگتر خواهد شد:

$$\frac{۶۰۰۰+x}{۷}=\frac{۶۰۰۰+۳۶۰۰۰}{۷}=۶۰۰۰$$

اکنون که دارایی پدر و سهم هر پسر معین شد ، می‌توان عدهٔ فرزندان را معین‌کرد :

عدهٔ فرزندان : $۳۶۰۰۰ : ۶۰۰۰ = ۶$ نفر

مثال۳ ـ دوعدد چنان تعیین کنید که‌تفاضل و مجموع و حاصل ضرب آنها بترتیب بااعداد ۲ و ۳ و ۵ متناسب باشند .

حل ـ آن دوعدد را x و y فرض می‌کنیم . طبق صورت مسئله باید $(x-y)$ و $(x+y)$ و xy با اعداد ۲ و ۳ و ۵ متناسب‌باشند؛یعنی داشته باشیم :

$$\frac{x-y}{۲}=\frac{x+y}{۳}=\frac{xy}{۵}$$

معادلات اخیر رامی‌توان به صورت دستگاه زیر نوشت:

$$(I)\quad \begin{cases} \frac{x-y}{۲}=\frac{x+y}{۳} \\ \frac{x-y}{۲}=\frac{xy}{۵} \end{cases}$$

یا

$$(II)\quad \begin{cases} ۳x-۳y=۲x+۲y \\ ۵x-۵y=۲xy \end{cases}$$

از معادلهٔ اول دستگاه (II) حاصل می‌شود:

$$x=۵y$$

در معادلهٔ دوم دستگاه (II) به جای x مقدارش را بر حسب y قرار می‌دهیم، حاصل می‌شود :

$$۲۵y-۵y=۱۰y^۲$$
$$۲۰y=۱۰y^۲$$
$$۲۰y-۱۰y^۲=۰$$
$$۱۰y(۲-y)=۰$$
$$۱۰y=۰ \qquad \boxed{y=۰}$$
$$۲-y=۰ \qquad \boxed{y=۲}$$

اگر $y=۰$ باشد ، از رابطهٔ $x=۵y$ خواهیم داشت : $x=۰$ ، جوابهای $x=۰$ و $y=۰$ با شرایط مسئله تطبیق می‌کنند ولی متمایز نیستند . اگر $y=۲$ باشد ،از رابطهٔ $x=۵y$ نتیجه می‌شود : $x=۱۰$ پس جوابهای متمایز دستگاه $x=۱۰$ و $y=۲$ است .

مثال۴ ـ پدری ۳۹ سال و پسرش ۱۵ سال دارد . پس از چند سال سن پدر سه برابرسن پسرمی‌شود.

حل ـ اگر جواب مسئله را x سال فرض کنیم ،پس از x سال سن پسرو پدر بترتیب چنین‌می‌شود:

سن پسر : $۱۵+x$

سن پدر : $۳۹+x$

و طبق صورت مسئله ، پس از x سال باید سن پدر سه برابر سن پسر شده باشد؛ یعنی باید رابطهٔ زیر برقرار باشد :

$$(I) \qquad 39+x=3(15+x)$$

رابطهٔ (I) معادلهٔ مسئله است و چون آن را حل کنیم ، جواب $x=-3$ رابدست می‌دهد .

این جواب منفی بدین معنی است که سن پدر هیچوقت درآینده سه برابر سن پسر نخواهد شد بلکه سه سال قبل سن پدر سه برابر سن پسر بوده است .

تمرین

۱ ـ درفاصلهٔ B و A چرخهای جلو درشکه‌ای ۲۸۰۰ دور بیش از چرخهای عقب می‌زنند . چنانچه محیط چرخها ۱/۸متر و ۲/۷متر باشد ، فاصلهٔ B و A رامعین‌کنید.

۲ ـ قیمت ۲۰۰ جلدکتاب ۱۴۵۷۰ ریال است. هرگاه کتابها جلدی ۸۰ ریال و۷۰ ریال قیمت داشته باشند، معین‌کنید ازهرکدام چندجلدبوده است .

۳ ـ مطلوب است تعیین عددی‌که اگر از $\frac{2}{3}$ آن ۱۲ واحدکم‌کنیم، حاصل مساوی نصف همان عدد شود.

۴ ـ پدری ۳۸ سال وپسرش ۱۱ سال دارد. پس ازچند سال سن‌پدر دوبرابر سن پسر می‌شود .

۵ ـ پدری ۵۶ سال وپسرش ۲۹ سال دارد. پس‌از چند سال سن پدر دوبرابر سن پسر می‌شود (تعبیر جواب).

۶ ـ چند نفر مبلغی را بین خود قسمت‌کردند . اولی ۱۰۰۰ ریال برداشت به اضافهٔ $\frac{1}{9}$ باقیمانده . دومی ۲۰۰۰ ریال برداشت به‌اضافهٔ $\frac{1}{9}$ باقیمانده ونفرات بعدی نیز همین‌طور برداشتند. چنانچه سهم این چند نفر متساوی باشد، اصل‌پول وتعداد نفرات وسهم هریك راتعیین‌کنید .

۷ ـ درساعت ۱۲ عقربهٔ ساعت‌شمار برعقربهٔ دقیقه شمار منطبق‌است. معین‌کنید درچه ساعتی مجدداً دوعقربه روی هم قرار می‌گیرند .

۸ ـ عدد ۴۶ را به‌دوجزء طوری تقسیم‌کنیدکه مجموع خارج‌قسمتهای آنها بر۷ و۳ برابر ۱۰ شود .

۹ ـ پدری با پسرش قرارگذاشت بازای نمرهٔ قبولی هرپرسش‌شفاهی ۵۰ ریال بدهد وهر پرسشی‌که نمرهٔ قبولی نداشته باشد ۴۰ ریال بگیرد. پس از ۳۰ پرسش پسر ۶۹۰ ریال پول داشت . معین‌کنید چند بار نمرهٔ قبولی داشته است .

۱۰ ـ مطلوب است تعیین یك عدد سه‌رقمی بطوری که رقم صدگان‌آن سه‌برابر رقم یکان و $\frac{2}{3}$ رقم‌دهگان‌باشد؛ واگرعددرا به‌عکس ترتیب‌بنویسیم، ۳۹۶ واحدکوچکتر شود .

۱۱ ـ فاصلهٔ دوشهر A و B ، ۸کیلو متر است. دو متحرك اولی‌با سرعت ۴کیلو متردرساعت ودومی باسرعت ۵کیلومتر درساعت ازA به سمت

B حرکت می‌کنند. معین کنید درچه فاصله‌ای ازشهر A دومی‌اولی‌را ملاقات خواهدکرد، درصورتی‌که پس ازرسیدن به شهر B و۱۰ دقیقه توقف به شهر A حرکت‌کند .

۱۲ ـ بازرگانی سرمایه‌اش را به سه قسمت تقسیم می‌کند بطوری که قسمت اول ودوم‌باهم برابروقسمت سوم مساوی مجموع آن دوقسمت‌باشد. اگر قسمت اول رابانرخ ۵٪ وقسمت دوم‌را با نرخ $\frac{1}{4}$۵٪ و قسمت سوم را بانرخ ۵/۵٪ به مرابحه دهد، سود سالانه‌اش ۸۵۰۰ ریال می‌شود . مطلوب است سرمایهٔ بازرگان .

۱۳ ـ آلیاژی است از مس وطلا به وزن ۳۵۰گرم وبه عیار ۹۳۰٪ ، چندگرم مس‌بایدبه‌آن افزود تاآلیاژی به‌عیار ۹٪ بدست‌آید .

۱۴ ـ اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای سه عدد صحیح متوالی است . طول اضلاع مثلث رابدست آورید (بحث) .

۱۵ ـ مثلث ABC مفروض است. خطی‌مانند DE به موازات BC چنان رسم کنیدکه $BD+CE=DE+m$ (بحث) .

۱۶ ـ مجموع سن ۳ نفر ۴۱ سال است . سن دومی ۳ سال از اولی بیشتر وسن سومی ۴سال ازاولی‌کمتر است. سن هریك‌را پیداکنید .

۱۷ ـ مبلغ ۵۸ ریال با ۱۴ سکهٔ ۵ ریالی و ۲ ریالی پرداخت شده است.معلوم‌کنید از هرکدام چندسکه بوده است .

۱۸ ـ شخصی دفعهٔ اول $\frac{1}{5}$ پولش رابه اضافهٔ ۲۰ریال‌خرج می‌کند، دفعهٔ دوم $\frac{1}{5}$ باقیمانده را به‌اضافهٔ ۵۰ ریال خرج می‌کندو $\frac{26}{75}$ اصل‌پول برایش باقی می‌ماند . معین کنید چه مبلغ پول داشته است .

۱۹ ـ نسبت دو سرمایه $\frac{3}{4}$ است. اگربه‌آن‌که‌کمتراست۱۰۰۰ ریال وبه‌آن‌که بیشتر است ۲۰۰۰ ریال افزوده شود، نسبت‌آنها $\frac{2}{3}$ خواهد شد . مبلغ هریك راتعیین‌کنید .

۲۰ ـ حسن ۴۶ سال وحسین ۱۸ سال دارد . پس از چند سال سن حسن ۳ برابر سن حسین خواهد شد.

۲۱ ـ درکارخانه‌ای ۱۲۰ مردو زن وطفل کار می‌کنند . عدهٔ مردان برابر است با۴ برابر عدهٔ زنان به اضافهٔ ۴ نفر و نیز ۵ برابر عدهٔ اطفال بعلاوهٔ ۴ نفر. عدهٔ هریك رامعین‌کنید .

۲۲ ـ دریك‌عدد دورقمی، رقم دهگان $\frac{2}{3}$ رقم یکان است و عددی‌که باهمان دو رقم وبه عکس ترتیب نوشته شود۱۸ واحد ازخود عددبیشتراست. آن عدد را پیداکنید .

۲۳ ـ حسن به حسین‌گفت: «آن موقع‌که من به سن فعلی تو بودم، سن تونصف سن‌فعلی من‌بود ووقتی‌که تو به‌سن فعلی من برسی،مجموع سنین ما۹۰سال خواهد بود.» سن‌فعلی هریك راتعیین‌کنید .

۲۴ ـ مبلغی بطور متساوی بین چندنفرتقسیم می‌شود. اگربه‌عدهٔ‌آنها ۳ نفرافزوده شود ، سهم هریك ۱ ریال‌کم می‌شود . اگر از عدهٔ آنها ۲ نفر کم شود به‌سهم هریك ۱ریال افزوده می‌شود. مبلغ وعده را تعیین کنید .

۲۵ ـ عددی سه رقمی تعیین‌کنیدکه مجموع ارقامش ۱۳ باشد ورقم آحاد ۳ برابر رقم سدگان باشد، واگر۳۹۶ واحد به‌آن‌افزوده شود،عددی باهمان‌سه‌رقم ولی به‌عکس ترتیب بدست‌آید .

۲۶ ـ خارج قسمت تقسیم دو عدد،۴ و باقیمانده ۳۰ است . مجموع

مقسوم ومقسوم‌علیه وخارج قسمت وباقیمانده ۵۷۴ است. مقسوم ومقسوم‌علیه رامعلوم‌کنید .

۲۷ ـ سه‌نفر در مسابقه‌ای قرار گذاشتندکه هرکدام نفر سوم شد پول دو نفر دیگر را دو برابرکند . در سه مسابقه ، هرکدام بنوبت یك دفعه سوم شد و پس از پایان مسابقه هر یك a ریال پول داشت . معلوم‌کنید قبل از شروع مسابقه هریك چه‌مبلغ داشته است .

۲۸ ـ زرگری دو شمش دارد که اولی ۲۷۰ گرم طلا و ۳۰گرم مس دارد و دومی ۲۰۰گرم طلا و۵۰گرم مس دارد. معلوم کنید ازهریك از دو شمش چقدر باید انتخاب‌کند تا شمش جدیدی به وزن ۴۰۰گرم و به عیار ۰/۸۲۵ بسازد .

۲۹ ـ سود سالانهٔ دو سرمایه جمعاً ۳۷۵ ریال است . سرمایهٔ اولی‌که ۱۵۰۰ ریال از دومی‌کمتر است، بانرخ ۵٪ و دومی با نرخ ۴٪ به مرابحه گذاشته شده‌است . سرمایه‌ها را تعیین‌کنید .

۳۰ ـ اتوموبیلی از A به B حرکت می‌کند . راه دارای سه قسمت مسطح سربالایی وسراشیب است. در موقع رفتن از A به B قسمت سربالایی $\frac{۴}{۵}$ قسمت سراشیب است . سرعت اتوموبیل در قسمت مسطح ۴۰کیلو متر در ساعت ودرسربالایی ۲۵کیلو متر ودر سراشیبی ۵۰کیلومتر است. اگرفاصلهٔ A و B، ۸۰کیلومتر وزمان رفتن از Bبه A، ۶دقیقه بیشتر اززمان‌رفتن ازA به B باشد، طول هرقسمت ازراه راحساب‌کنید .

۳۱ ـ دوضلع a وb ازمثلثی معلوم است ومجموع دو ارتفاع وارد به این دوضلع برابر است باارتفاع وارد به ضلع سوم. ضلع سوم مثلث‌راحساب کنید .

۳۲ ـ مساحت مثلث متساوی‌الساقینی $\frac{۱۰}{۹}$ مساحت مربعی است‌که بر

روی قاعده‌اش ساخته می‌شود وهر ساق مثلث $۲۳cm$ ازقاعده بیشتر است. اضلاع مثلث راحساب کنید .

۳۳ ـ اضلاع $AB=x$ و $AC=y$ مثلث ABC را حساب‌کنید ، در صورتی‌که $BC=a$ و $AB+AC=k$ و می‌دانیم‌که نیمساز رأس B ضلع AC را درنقطهٔ D چنان قطع می‌کندکه $BD=DC$ است . (a و k مقادیر معلومند) .

۳۴ـ نیمدایره‌ای به مرکز O و به قطر $AB=۲R$ مفروض است. ازنقطهٔ C واقع بر AB وبینB وOعمودی برآن اخراج‌می‌کنیم‌تانیمدایره رادر D قطع‌کند. مماس برنیمدایره در نقطهٔ D امتداد قطر ABرا در E قطع‌می‌کند. مطلوب است‌تعیین‌نقطهٔ C بقسمی‌که $DE=CD+CB$ باشد.

فصل هفتم

حل معادلهٔ یك مجهولی درجهٔ دوم

۱- در حل معادلات جبری یك مجهولی ، اگر پس از حذف مخرجها و رادیکالها و نقل تمام جمله ها ، اعم از معلوم ومجهول ، به یك طرف ، معادله را برحسب قوای نزولی حرف مجهول مرتب‌کنیم، بزرگترین توان‌مجهول را **درجهٔ** آن معادلهٔمرتب شده می‌گویند .

مثال ۱- معادلهٔ : $\sqrt{x+1}=x+5$ را در نظرمی‌گیریم .

برای‌حل‌آن‌چنین می‌کنیم :

$$x+1=(x+5)^2$$

یا

$$x^2+9x+24=0$$

معادلهٔ حاصل از درجهٔ دوم است .

مثال ۲- معادلهٔ $\frac{2x}{x^2-1}+2=\frac{x+2}{x-1}+\frac{x-2}{x+1}$ را درنظرمی‌گیریم .

برای حل‌آن، مخرج راحذف‌ومعادله راساده ومرتب می‌کنیم :

$$2x+2(x^2-1)=(x+2)(x+1)+(x-2)(x-1)$$

$$2x-6=0$$

این معادله ازدرجهٔ اول است .

۲- صورت کلی معادلهٔ یك مجهولی درجهٔ دوم چنین است :

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \text{(I)}$$

a و b و c ضرایب معلوم جبری هستند. ضریب جملهٔ درجهٔ دوم را a و ضریب جملهٔ درجهٔ اول را b وعدد یا جملهٔ مستقل از x (مقدار ثابت) را c می‌نامند .

b و c می‌توانند صفر باشند ولی‌هیچوقت ضریب جملهٔ درجهٔ دوم یعنی a صفر نیست ، زیرا اگر a صفر باشد دیگر معادله از درجهٔ دوم نخواهد بود .

معادلهٔ درجهٔ دوم را وقتی **کامل** گویند که ضرایب a و b و c مخالف صفر باشند ؛ در غیراین صورت معادله را **ناقص** می‌گویند .

حل معادلهٔ درجهٔ دوم ، یعنی تعیین جوابهای آن بطوری که در معادله صدق کنند . جواب معادلهٔ : $2x+1=0$ عدد $-\frac{1}{2}$ و جواب معادلهٔ : $4x^2-5x+1=0$ اعداد ($\frac{1}{4}$ و ۱) و جواب معادلهٔ : $x^3+1=0$ عدد (۱-) است .

مثال- m را بطریقی تعیین کنید که یکی از جوابهای معادلهٔ $(m-1)x^2+2mx+m-2=0$ عدد (۲-) باشد .

عدد (-۲) که می‌خواهیم جواب معادله باشد ، باید در معادله صدق کند ، یعنی :

$$۴(m-۱)-۴m+m-۲=۰$$
$$۴m-۴-۴m+m-۲=۰$$
$$m=۶$$

۴- حل معادلات ناقص درجهٔ دوم :

الف- اگر $b=c=۰$ باشد ، معادلهٔ (I شمارهٔ ۲) به صورت ناقص $ax^۲=۰$ درمی‌آید . چون $a\neq۰$ است ، $x^۲$ یعنی $x.x$ مساوی صفر است ، پس باید هر یك ازاین عوامل ضرب صفر باشد . در نتیجه معادله دارای دو جواب مساوی صفراست یا به عبارت دیگر می‌گویند : **معادله ریشهٔ مضاعف صفر دارد .**

مثال- مطلوب است حل معادلهٔ :

$$\left(\frac{۵}{۲}x+۸\right)^۲-۴(x+۲)(x+۸)=۰$$
$$\frac{۲۵}{۴}x^۲+۶۴+۴۰x-۴x^۲-۴۰x-۶۴=۰$$
$$\frac{۲۵}{۴}x^۲-۴x^۲=۰$$
$$\frac{۹x^۲}{۴}=۰$$
$$x^۲=۰$$
$$\boxed{x=۰}$$

ب- اگر $c=۰$ باشد ،معادلهٔدرجهٔ دوم (I شمارهٔ ۲) به صورت ناقص زیر نوشته می‌شود :

$$ax^۲+bx=۰$$

در این معادله از x فاکتور می‌گیریم و هر یك از عوامل ضرب را مساوی صفرقرار می‌دهیم . جوابهای معادله بدست می‌آید :

$$ax^۲+bx=۰$$
$$x(ax+b)=۰$$
$$\boxed{x=۰}$$
$$ax+b=۰$$
$$\boxed{x=-\frac{b}{a}}$$

معمولا جوابها را با علامت x' و x'' نمایش می‌دهند ، پس می‌توان نوشت :

$$x'=۰$$
$$x''=-\frac{b}{a}$$

مثال- معادلهٔ: $\frac{x}{x+۱}+\frac{x+۱}{x-۱}+۱=۰$ راحل کنید .

$$x(x-۱)+(x+۱)^۲+x^۲-۱=۰$$
$$x^۲-x+x^۲+۲x+۱+x^۲-۱=۰$$
$$۳x^۲+x=۰$$
$$x(۳x+۱)=۰$$

$$\boxed{x'=0}$$

$$3x+1=0$$

$$\boxed{x''=-\frac{1}{3}}$$

ج ـ اگر $b=0$ باشد ،معادلهٔ (I شمارهٔ ۲) به صورت ناقص زیر در می‌آید :

$$ax^2+c=0$$

در این معادله از a فاکتور می‌گیریم :

$$a(x^2+\frac{c}{a})=0$$

چون $a\neq 0$ است :

$$x^2+\frac{c}{a}=0$$

یا

$$x^2=-\frac{c}{a}$$

اگر c و a متحدالعلامه باشند ، سمت راست تساوی اخیر منفی خواهد شد، درنتیجه معادله دارای جواب نخواهد بود(چرا؟).

چنانچه c و a مختلف‌العلامه باشند چنین خواهیم داشت :

$$\boxed{x'=+\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ و } x''=-\sqrt{-\frac{c}{a}}}$$

یعنی دراین حالت معادلهٔ ناقص دوریشهٔ قرینه دارد .

نتیجه ـ معادلهٔ ناقص درجهٔ دوم $ax^2+c=0$ وقتی دارای جواب است که c و a مختلف‌العلامه باشند .

مثالـ معادلهٔ : $2x(x-1)+(x+1)^2=4$ را حل کنید :

$$2x^2-2x+x^2+1+2x-4=0$$

$$3x^2-3=0$$

a و c مختلف‌العلامه‌اند ، معادله جواب دارد :

$$3x^2=3$$

$$x^2=1$$

$$\boxed{x=\pm 1}$$

۴ـحل معادلهٔ کامل درجهٔ دوم :

چون $a\neq 0$ ، می‌توان طرفین معادلهٔ درجهٔ دوم کامل :

$$(I) \qquad ax^2+bx+c=0$$

را در 4a ضرب‌کرد :

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

دوجملهٔ$(4a^2x^2+4abx)$ را می‌توان به صورت : $(2ax+b)^2-b^2$ نوشت ، پس چنین خواهیم داشت :

$$(2ax+b)^2-b^2+4ac=0$$

$$(II) \qquad (2ax+b)^2=b^2-4ac$$

الفـ اگر a و c مختلف‌العلامه باشند ، ac عددی منفی و

$4ac$ – مثبت است . پس b^2-4ac مثبت می‌شود .

ممکن است a و c متحدالعلامه باشند ولی نتیجهٔ محاسبهٔ b^2-4ac مثبت شود .

درهرصورت وقتی که b^2-4ac مثبت باشد ، می‌توان ازطرفین رابطهٔ (II) جذرگرفت :

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

$$2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

رابطهٔ اخیر را **«دستور b»** می‌نامند و جوابهای معادلهٔ (I) به کمك این دستور قابل محاسبه است .

می‌توان جوابها راجداگانه نوشت :

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

و

$$x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ب ـ هرگاه $b^2-4ac=0$ باشد،معادلهٔ (II) به صورت:

$$(2ax+b)^2=0$$

یا

$$(2ax+b)(2ax+b)=0$$

درمی‌آیدکه ازصفر قرار دادن عوامل‌ضرب نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} x'=-\dfrac{b}{2a} \\ x''=\dfrac{-b}{2a} \end{cases}$$

و

یعنی، **معادلهٔ (I) ریشهٔ مضاعف** $x'=x''=-\frac{b}{2a}$ **دارد.**

ج ـ چنانچه $b^2-4ac<0$ باشد، چون $(2ax+b)^2$ همواره مثبت است، برقراری تساوی (II) غیر ممکن است یابه عبارت دیگر معادلهٔ (I) دارای جواب نیست و می‌گویند **ریشه‌های معادله‌موهومی است** .

از آنچه‌گفته شد نتایج زیر عاید می‌شود :

اولاً ـ هرگاه $b^2-4ac>0$ یا a و c مختلف‌العلامه‌باشند، معادلهٔ (I) دارای **دو جواب متمایز** است. به عبارت دیگر ، **ریشه‌ها حقیقی ومتمایزند .**

ثانیاً ـ هرگاه $b^2-4ac=0$ باشد، معادلهٔ (I) دارای **دوریشهٔ مساوی یا ریشهٔ مضاعف** است .

ثالثاً ـ هرگاه $b^2-4ac<0$ باشد، معادلهٔ (I) دارای جواب نیست، به عبارت دیگر، **ریشه‌ها موهومی** هستند.

تبصرهٔ ۱ ـ b^2-4ac را **مبین** معادلهٔ درجهٔ دوم می‌نامند وبا حرف یونانی Δ (دلتا)نمایش می‌دهند .

مثال۱ ـ معادلهٔ درجهٔ دوم: $4x^2-5x+1=0$ راحل کنید.

$$a=4$$
$$b=-5$$
$$c=1$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{8}$$

$$x=\frac{5\pm3}{8}$$

$$x'=\frac{5+3}{8}=1$$

$$x''=\frac{5-3}{8}=\frac{1}{4}$$

مثال۲ ـ معادلهٔ درجهٔ دوم : $9x^2+6x+1=0$ را حل کنید.

$$a=9$$
$$b=6$$
$$c=1$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-6\pm\sqrt{36-36}}{18}$$

$$x'=\frac{-6+0}{18}=-\frac{1}{3}$$

$$x''=\frac{-6-0}{18}=-\frac{1}{3}$$

مثال۳ ـ معادلهٔ درجهٔ دوم: $x^2-3x+4=0$ را حل کنید.

$$a=1$$
$$b=-3$$
$$c=4$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt{9-16}}{2}$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{2}$$

چون مبین معادله منفی است، ریشه‌ها موهومی هستند .

تبصرهٔ ۲ ـ اگر ضرایب a و b و c برعددی مخالف صفرقابل قسمت باشند ، برای سهولت محاسبه ، بهتر است قبل از حل ، طرفین معادله را بر آن عدد تقسیم کنند .

تبصرهٔ ۳ ـ معمولاوقتی‌کهمبین‌معادله مجذورکامل‌نباشد،ریشه‌ها را به همان صورت با رادیکال می‌نویسند. در برخی ازمسائل می‌توان باتقریب‌لازم ازرادیکال جذرگرفت.

۵ ـ دستور b' ـ هر گاه b ، ضریب جملهٔ درجهٔ اول معادلهٔ (I شمارهٔ ۴) ،زوج‌باشدیعنی بر۲ قابل قسمت‌باشد، معمولا نصف b را b' فرض می کنند ($b=2b'$) ؛ با این فرض ، دستور b را می‌توان چنین نوشت :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}=\frac{2(-b'\pm\sqrt{b'^2-ac})}{2a}$$

$$\boxed{x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}}$$

این دستور را **«دستور b'»** می‌نامند.

مثال ـ مطلوب است حل معادلهٔ : $15x^2-34x+15=0$

$b=-34 \qquad b'=-17 \qquad a=15 \qquad c=15$

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}=\frac{17\pm\sqrt{289-225}}{15}$$

$$x=\frac{17\pm8}{15}$$

$$x'=\frac{5}{3}$$

$$x''=\frac{3}{5}$$

چنانچه معادلهٔ مفروض را به کمك دستور b حل‌می‌کردیم باز به همین جوابها می‌رسیدیم.

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

۶ ـ دیدیم که وقتی‌که معادلهٔ درجهٔ دوم کامل :

$$\text{(I)} \qquad ax^2+bx+c=0$$

دارای دوریشهٔ حقیقی ومتمایز باشد، ریشه‌های آن به صورت زیرند:

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

یك بار ریشه‌ها را با هم جمع می‌کنیم :

$$x'+x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}$$

یا :

$$\boxed{x'+x''=-\frac{b}{a}}$$

یعنی : **مجموع ریشه‌های هر معادلهٔ درجهٔ دوم ، مساوی است باخارج قسمت ضریب جملهٔ درجهٔ اول که با علامت مخالف اختیار شود، برضریب جملهٔ درجهٔ دوم .**

باردیگر ریشه‌ها را درهم ضرب می‌کنیم :

$$x'.x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$x'.x''=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

یا :

$$\boxed{x'.x''=\frac{c}{a}}$$

یعنی : حاصل ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم، مساوی است باخارج قسمت جملهٔ معلوم برضریب جملهٔدرجهٔ دوم.

معمولا مجموع ریشه‌ها را با S و حاصل ضرب آنها را با P نمایش می‌دهند :

$$S=x'+x''=-\frac{b}{a}$$

و

$$P=x'.x''=\frac{c}{a}$$

چنانچه ریشه‌ها را از هم تفریق کنیم چنین خواهیم داشت :

$$|x'-x''|=\left|\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|$$

$$|x'-x''|=\left|\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}+b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|$$

$$|x'-x''|=\left|\frac{2\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|$$

$$\boxed{|x'-x''|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}$$

یعنی : **قدر مطلق تفاضل ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم ، مساوی است باخارج قسمت جذرمبین معادله برقدر مطلق‌ضریب جملهٔ درجهٔ دوم .**

مثال۱ ــ مجموع وحاصل ضرب وتفاضل ریشه‌های معادلهٔ :

$$2x^2-5x+3=0$$

را مستقیماً بدست‌آورید .

$$S=-\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$$

$$P=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$$

$$|x'-x''|=\frac{\sqrt{25-24}}{2}=\frac{1}{2}$$

مثال۲ ــ تحقیق‌کنید کدام دسته از اعداد : ($-\frac{1}{6}$ و ۱)و ($\frac{1}{6}$ و ۱) و ($\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$) ریشه‌های معادلهٔ زیر است:

$$6x^2-5x+1=0$$

مجموع وحاصل ضرب ریشه‌های معادله راتشکیل می‌دهیم:

$$S=-\frac{b}{a}=\frac{5}{6}$$

و

$$P=\frac{c}{a}=\frac{1}{6}$$

مجموع اعداد دستهٔ اول بـا مجموع ریشه های معادلهٔ مفروض مساوی است . اما حاصل ضرب آنها با حاصل ضرب ریشه‌های معادله یکی نیست . همچنین حاصل ضرب اعداد دستهٔ دوم با حاصل ضرب ریشه‌ها متساوی است ولی مجموع آنها با مجموع ریشه‌ها یکی‌نیست.
ولی اعداد دستهٔ سوم جواب معادله‌اند زیرا :

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۶}$$

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}$$

مجموع وحاصل ضرب اعداد این دسته بامجموع وحاصل ضرب ریشه‌های معادله برابر است .

مثال۳ ـ k را بطریقی تعیین کنیدکه یکی‌از ریشه‌های معادلهٔ :

$$۴x^{۲}-kx+۳=۰$$

مساوی $\frac{۳}{۴}$ باشد.

راه اول ـ این جواب باید در معادله صدق‌کند ، پس چنین خواهیم داشت :

$$۴(\frac{۳}{۴})^{۲}-k(\frac{۳}{۴})+۳=۰$$

$$\frac{۹}{۴}-\frac{۳k}{۴}+\frac{۳}{۱}=۰$$

$$۳k=۲۱$$

$$\boxed{k=۷}$$

راه دوم ـ ابتدا به‌کمك حاصل ضرب ریشه‌ها ، ریشهٔ دیگر را حساب می‌کنیم. مجموع دو ریشه باید با $-\frac{b}{a}$ معادله برابر باشد:

$$x'.x''=\frac{c}{a}$$

$$\frac{۳}{۴}x''=\frac{۳}{۴}$$

$$x''=۱$$

بنابراین مجموع ریشه‌ها ازطرفی چنین می‌شود :

$$x'+x''=۱+\frac{۳}{۴}=\frac{۷}{۴}$$

از طرف دیگر مجموع ریشه‌های معادلهٔ مفروض ، برابر $(-\frac{b}{a})$ یعنی $\frac{k}{۴}$ است:

$$x'+x''=\frac{k}{۴}$$

از مقایسهٔ این دو مقدار که برای مجموع ریشه‌ها پیدا کردیم نتیجه می‌شود :

$$\frac{k}{۴}=\frac{۷}{۴}$$

وازآنجا: $\boxed{k=۷}$

موارد استعمال مجموع وحاصل ضرب ریشه‌ها

۷ ـ هرگاه طرفین معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ را بر

$a\neq 0$ تقسیم‌کنیم چنین خواهیم داشت :

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

یا :

$$x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0$$

اما می‌دانیم‌که $\left(-\frac{b}{a}\right)$ همان S و $\frac{c}{a}$ همان P است ، پس می‌توان چنین نوشت :

$$\boxed{x^2-Sx+P=0}$$

یا:

$$\boxed{x^2-(\text{مجموع ریشه‌ها})x+\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=0}$$

مثال نوع اول : الف ـ معادلهٔ درجهٔ‌دومی بنویسید که ریشه‌های آن اعداد ۲ و ۵− باشد .

$$x'=2$$
$$x''=-5$$
$$S=x'+x''=2-5=-3$$

و

$$P=x'\cdot x''=2(-5)=-10$$
$$x^2-Sx+P=0$$
$$x^2+3x-10=0$$

ب ـ معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{1}{a-1}$ و $\frac{1}{a+1}$ باشد :

$$S=x'+x''=\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}=\frac{2a}{a^2-1}$$

$$P=x'\cdot x''=\frac{1}{a-1}\times\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a^2-1}$$

پس معادلهٔ مطلوب چنین می‌شود :

$$x^2-\frac{2a}{a^2-1}x+\frac{1}{a^2-1}=0$$

یا

$$(a^2-1)x^2-2ax+1=0$$

مثال نوع دوم : الف ـ مجموع دو عدد ۱۲ و حاصل‌ضرب آنها ۲۰ است . آن دو عدد را پیدا کنید .

دوعدد مطلوب را دو ریشهٔ یك معادلهٔ درجهٔ دوم فرض می‌کنیم ، پس :

$$S=12$$
$$P=20$$
$$x^2-Sx+P=0$$
$$x^2-12x+20=0$$

از حل این معادلهٔ درجهٔ دوم ، آن دو عدد بدست می‌آید:

$$x=6\pm\sqrt{36-20}$$
$$x'=6+4=10$$
$$x''=6-4=2$$

پس آن دوعدد ۲ و ۱۰ است .

ب ـ مجموع دو عدد ۲ و حاصل‌ضرب آنها (۱−) است . آن

دوعدد را پیداکنید .

$$S=2$$
$$P=-1$$
$$x^2-Sx+P=0$$
$$x^2-2x-1=0$$
$$x=1\pm\sqrt{2}$$
$$x'=1+\sqrt{2}$$
$$x''=1-\sqrt{2}$$

بحث در وجود وعلامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

۸ ـ دیدیم که معادلهٔ درجهٔ دوم وقتی دارای دوجواب حقیقی است که a و c مختلف‌العلامه باشند و چنانچه a و c متحدالعلامه باشند شرط وجود دوجواب حقیقی این است‌که $\Delta>0$ باشد. درحالت $\Delta=0$ دو ریشهٔ معادله متساوی و در حالت $\Delta<0$ ریشه‌ها موهومی هستند .

با یاد آوری مطالب بالا برای بحث در بارهٔ وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (بدون حل کردن آن) سه حالت ممکن است اتفاق افتد :

حالت اول : $\frac{c}{a}<0$.

در این حالت به علت مثبت بودن Δ (شمارهٔ ۴ ـ بند الف) ، معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی‌است وچون $\frac{c}{a}$ یعنی حاصل ضرب ریشه‌ها منفی است ، معلوم می‌شود دو ریشه مختلف‌العلامه‌اند (یك ریشه مثبت ویك ریشه منفی‌است) .

حال اگر مجموع ریشه‌ها یعنی $(-\frac{b}{a})$ مثبت باشد، نتیجه می‌گیریم که قدر مطلق ریشهٔ مثبت بیشتر از قدر مطلق ریشهٔ منفی است وچنانچه $(-\frac{b}{a})$ منفی باشد، معلوم می‌شود قدرمطلق ریشهٔ منفی‌بیشتر از قدر مطلق ریشهٔ مثبت است و بالاخره هرگاه $(-\frac{b}{a})$ برابر صفر باشد، دوریشه قرینهٔ یکدیگرخواهند بود .

حالت دوم : $\frac{c}{a}>0$.

در این حالت بدون تشکیل Δ نمی‌توان وجود ریشه‌ها را قطعی دانست وباید $\Delta=b^2-4ac$ راتشکیل داد :

الف : $b^2-4ac>0$

در این صورت معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی است و چون $\frac{c}{a}$ یعنی حاصل‌ضرب‌ریشه‌ها مثبت‌است‌معلوم‌می‌شود دوریشه‌متحدالعلامه‌اند (هردومثبت‌یاهردومنفی)وعلامت‌مشترك‌دوریشه‌همان‌علامت مجموعشان، یعنی علامت$(-\frac{b}{a})$ است .

ب : $b^2 - 4ac = 0$.

در این صورت معادله دارای دو ریشهٔ متساوی (ریشهٔ مضاعف) است و مقدار مشترک دو ریشه برابر $(-\frac{b}{2a})$ و علامت آنها همان علامت $(-\frac{b}{2a})$ یا علامت $(-\frac{b}{a})$ است .

ج: $b^2 - 4ac < 0$

در این صورت معادله جواب ندارد .

حالت سوم: $\frac{c}{a} = 0$

در این حالت چون حاصل ضرب ریشه‌ها برابر صفر است ، لااقل یکی از ریشه‌ها برابر صفر خواهد بود و در نتیجه مقدار ریشهٔ دیگر برابر است با مجموع ریشه‌ها یعنی $(-\frac{b}{a})$ و علامتش نیز همان علامت $(-\frac{b}{a})$ است .

مثال ۱- وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ :

$$2x^2 - 7x - 6 = 0$$

را پیش‌بینی کنید .

چون a و c مختلف‌العلامه‌اند ، معادله دو ریشهٔ متمایز دارد یا چون :

$$\Delta = 49 + 48 = 97 > 0$$

دو ریشه متمایز است .

$$\frac{c}{a} = \frac{-6}{2} = -3 < 0$$

چون $\frac{c}{a} < 0$ ، دوریشه مختلف‌العلامه‌اند .

$$-\frac{b}{a} = \frac{-(-7)}{2} = \frac{7}{2} > 0$$

چون $\frac{-b}{a} > 0$ ، قدرمطلق ریشهٔ مثبت از قدر مطلق ریشهٔ منفی بیشتر است .

مثال ۲- وجود وعلامت ریشه‌های معادلهٔ :

$$4x^2 - 3 = 0$$

را پیش‌بینی کنید .

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 + 48 = 48 > 0$$

چون $\Delta > 0$ ، دوریشه متمایزند .

$$\frac{c}{a} = \frac{-3}{4} < 0$$

چون $\frac{c}{a} < 0$ ، دوریشه مختلف‌العلامه‌اند .

$$\frac{-b}{a} = \frac{0}{4} = 0$$

چون $-\frac{b}{a} = 0$ ، دوریشه قرینه‌اند .

مثال ۳- وجود وعلامت ریشه‌های معادلهٔ :

$$2x^2 - 7x + 4 = 0$$

را پیش بینی کنید.

$$\Delta = ۴۹ - ۳۲ = ۱۷ > ۰$$

چون $\Delta > ۰$ ، معادله دارای دوریشهٔ متمایز است .

$$\frac{c}{a} = \frac{۴}{۲} = ۲ > ۰$$

چون $\frac{c}{a} > ۰$ ، دوریشه متحدالعلامه‌اند .

$$-\frac{b}{a} = -\frac{(-۷)}{۲} = \frac{۷}{۲} > ۰$$

چون $-\frac{b}{a} > ۰$ ، دوریشه مثبتند .

مثال۴ـ وجود وعلامت ریشه‌های معادلهٔ :

$$۵x^۲ + ۶x + ۱ = ۰$$

راپیش بینی کنید .

$$\Delta = ۳۶ - ۲۰ = ۱۶ > ۰$$

چون $\Delta > ۰$ ، معادله دارای دوریشهٔ متمایز است .

$$\frac{c}{a} = \frac{۱}{۵} > ۰$$

چون $\frac{c}{a} > ۰$ ، دوریشه متحدالعلامه‌اند .

$$\frac{-b}{a} = -\frac{۶}{۵} < ۰$$

چون $-\frac{b}{a} < ۰$ ،دوریشه منفی‌است.

مثال۵ ـ وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ :

$$۴x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$$

راپیش‌بینی کنید .

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = ۱۶ - ۱۶ = ۰$$

چون $\Delta = ۰$ ، معادله ریشهٔ مضاعف دارد .

$$\frac{-b}{a} = \frac{۴}{۴} = ۱ > ۰$$

چون $\frac{-b}{a} > ۰$ ، ریشهٔ‌مضاعف مثبت ومقدارش چنین است:

$$x' = x'' = \frac{-b}{۲a} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

بحث فوق را به صورت جدول زیر می‌توان خلاصه کرد :

$\frac{c}{a}<0$		$-\frac{b}{a}>0$	قدرمطلق ریشهٔ مثبت بیشتر از قدرمطلق ریشهٔ منفی است ،
		$-\frac{b}{a}<0$	قدرمطلق ریشهٔ منفی بیشتر از قدرمطلق ریشهٔ مثبت است ،
		$-\frac{b}{a}=0$	دو ریشه قرینهٔ یکدیگرند .
$\frac{c}{a}>0$	$b^2-4ac>0$ دو ریشه متحدالعلامه‌اند	$-\frac{b}{a}>0$	دو ریشه مثبتند.
		$-\frac{b}{a}<0$	دو ریشه منفیند.
	$b^2-4ac=0$ هریك از دو ریشه مساوی با $-\frac{b}{2a}$ ، نصف مجموع ریشه‌هاست. (ریشهٔ مضاعف)	$-\frac{b}{a}>0$	ریشهٔ مضاعف مثبت است.
		$-\frac{b}{a}<0$	ریشهٔ مضاعف منفی است .
	$b^2-4ac<0$		معادله ریشه ندارد .
$\frac{c}{a}=0$	اقلا یك ریشه صفر و ریشهٔ دیگر برابر $-\frac{b}{a}$ است .	$-\frac{b}{a}>0$	ریشهٔ دیگر مثبت است.
		$-\frac{b}{a}<0$	ریشهٔ دیگر منفی است.
		$-\frac{b}{a}=0$	ریشهٔ دیگر صفر است.

۹ - معادلهٔ درجه دوم پارامتری - تعیین رابطهٔ مستقل از پارامتر بین ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم - با توجه به مطالبی که ضمن (شمارهٔ ۱ فصل سوم) در بارهٔ ضرایب حرفی یا پارامتری یك معادله گفته شد، درمعادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ ممکن است ضرایب a و b و c یالااقل یکی از آنها شامل یك یاچند مقدار حرفی باشند؛ به عبارت دیگر، ممکن است ضریبهای یك معادلهٔ درجه دوم یا لااقل یکی ازاین ضرایب به‌یك یاچند پارامتر بستگی داشته باشند؛این قبیل معادلات را معادلات درجه دوم پارامتری می‌نامند ؛ بدیهی است که در این نوع معادلات مقدار x' و x'' ، ریشه‌های معادله (به فرض موجود بودن) ، عموماً به مقدار پارامتر (یا پارامترهای) موجود در معادله بستگی خواهد داشت ودر نتیجه باتغییر مقدار پارامتر ، مقدار ریشه‌ها تغییر خواهد کرد ؛ مثلا درمعادلهٔ درجه دوم پارامتری :

$$mx^2+2(m-1)x+m-4=0 \qquad (1)$$

اگر مقدار پارامتر m را $\frac{3}{2}$ بگیریم ($m=\frac{3}{2}$) معادلهٔ (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$3x^2+2x-5=0 \qquad (2)$$

وریشه‌های معادلهٔ(۲) عبارتند از : $x'=1$ و $x''=-\frac{5}{3}$

واگر مقدار پارامتر m رابرابر ($-\frac{1}{8}$) بگیریم معادلهٔ (۱)به این صورت در می‌آید :

$$x^2+18x+33=0 \qquad (3)$$

وریشه‌های معادلهٔ (۳) عبارتند از :

$$x'=-9+4\sqrt{3} \quad \text{و} \quad x''=-9-4\sqrt{3}$$

بطوری که ملاحظه می‌کنید ریشه‌های معادلهٔ (۱) با تغییر مقدار پارامتر m تغییر می‌کنند ؛ معهذا ،عموماً باحذف یك پارامتر مفروض بین دورابطهٔ :

$$(E)\quad \begin{cases} x'+x''=-\dfrac{b}{a} \\ x'x''=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

می‌توان بین x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم: $ax^2+bx+c=0$ رابطه‌ای مستقل از این پارامتر (یعنی رابطه‌ای‌که بستگی به پارامتر مورد نظر نداشته باشد) تعیین کرد .

مثلا برای اینکه بین x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ (۱) رابطه‌ای مستقل ازپارامتر m تعیین کنیم ابتدا روابط (E) را برای معادلهٔ (۱) تشکیل می‌دهیم ، یعنی صورت کلی مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادلهٔ (۱) رابه شکل زیر می‌نویسیم :

$$(E')\quad \begin{cases} x'+x''=\dfrac{-2(m-1)}{m} \\ x'x''=\dfrac{m-4}{m} \end{cases}$$

حال پارامتر m را بین روابط دستگاه (E') حذف می‌کنیم؛ و برای این منظور از رابطهٔ دوم دستگاه (E') مقدار m را بر حسب x' و x'' حساب می‌کنیم و این مقدار m را در رابطهٔ اول دستگاه (E') قرار می‌دهیم :

$$mx'x''=m-4$$

$$m=\frac{4}{1-x'x''}$$

$$x'+x''=\frac{-2m+2}{m}=\frac{\dfrac{-8}{1-x'x''}+2}{\dfrac{4}{1-x'x''}}=$$

$$\frac{-8+2-2x'x''}{4}=\frac{-6-2x'x''}{4}$$

$$x'+x''=\frac{-3-x'x''}{2}$$

$$\boxed{2(x'+x'')+x'x''+3=0}$$

این رابطهٔ مستقل از m است که بین ریشه‌های معادلهٔ (۱) برقراراست .

تبصره ـ اگر یکی از روابط دستگاه (E) مستقل از پارامتر مورد نظر باشد همان رابطه جواب مسئله خواهد بود .

۱۰ ـ محاسبهٔ عباراتی‌که برحسب ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم متقارنند :

عباراتی نظیر $x'+x''$ و $x'.x''$ و $x'^2+x''^2$ و ..... و $x'^n+x''^n$ یا نظایر آنها رابر حسب x' و x'' **متقارن** گویند ، هر گاه باتبدیل x' به x'' و x'' به x' ، آن عبارت تغییر نکند .

می‌دانیم $x'.x''=\dfrac{c}{a}$ و $x'+x''=-\dfrac{b}{a}$ است .

مجموع توانهای n ام ریشه‌ها را با S_n نمایش می‌دهند . به این ترتیب :

$$S_2 = x'^2 + x''^2$$

و
$$S_n = x'^n + x''^n$$

و
$$S_{-2} = x'^{-2} + x''^{-2} = \frac{1}{x'^2} + \frac{1}{x''^2}$$

خواهد بود .

۱۱ - محاسبهٔ S_n - فرض می‌کنیم x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم : $ax^2+bx+c=0$ باشد . پس باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} ax'^2+bx'+c=0 \\ ax''^2+bx''+c=0 \end{cases}$$

طرفین رابطهٔ اول را در x'^{n-2} و رابطهٔ دوم را در x''^{n-2} ضرب می‌کنیم

$$\begin{cases} ax'^n+bx'^{n-1}+cx'^{n-2}=0 \\ ax''^n+bx''^{n-1}+cx''^{n-2}=0 \end{cases}$$

این دو رابطه را عضو بعضو باهم جمع می‌کنیم و از a و b و c در هردسته فاکتور می‌گیریم، نتیجهٔ عمل چنین خواهد بود :

$$\text{(I)}\quad a(x'^n+x''^n)+b(x'^{n-1}+x''^{n-1})+c(x'^{n-2}+x''^{n-2})=0$$

اما طبق قرارداد :

$$x'^n+x''^n=S_n$$

و
$$x'^{n-1}+x''^{n-1}=S_{n-1}$$

و
$$x'^{n-2}+x''^{n-2}=S_{n-2}$$

بنابراین رابطهٔ (I) را به صورت رابطهٔ (II) می‌توان نوشت:

$$\text{(II)}\quad \boxed{aS_n+bS_{n-1}+cS_{n-2}=0}$$

به کمك دستور (II) با معلوم بودن S_{n-2} و S_{n-1} می‌توان S_n را حساب کرد .

مثال۱ - مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم کامل را حساب کنید .

راه حل اول - مقصود محاسبهٔ $S_2=x'^2+x''^2$ است که در آن $n=2$ است، پس دستور (II) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$aS_2+bS_1+cS_0=0$$

اما
$$S_0=x'^0+x''^0=1+1=2$$

و
$$S_1=x'^1+x''^1=-\frac{b}{a}$$

پس
$$a.S_2+b\left(-\frac{b}{a}\right)+c\times 2=0$$

واز آنجا :
$$S_2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

راه حل دوم - برای محاسبهٔ $S_2=x''^2+x'^2$ به طرفین همین رابطه $2x'x''$ اضافه می‌کنیم:

$$S_2+2x'x''=x'^2+x''^2+2x'x''$$

$$S_2+2\left(\frac{c}{a}\right)=\left(-\frac{b}{a}\right)^2$$

$$S_2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

مثال۲ ـ مجموع مکعبات ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم کامل را حساب کنید.

راه اول ـ در دستور $aS_۳+bS_۲+cS_۱=۰$ به جای $S_۱$ و $S_۲$ مقادیرشان را قرار می‌دهیم $S_۳$ بدست می‌آید:

$$aS_۳+b\left(\frac{b^۲-۲ac}{a^۲}\right)+c\left(-\frac{b}{a}\right)=۰$$

$$S_۳=\frac{۳abc-b^۳}{a^۳}$$

راه دوم ـ به طرفین رابطهٔ $S_۳=x'^۳+x''^۳$ باید عبارت:

$$۳x'^۲x''+۳x'x''^۲$$

را اضافه‌کرد تاسمت راست رابطه به صورت اتحاد نوشته‌شود.

$$S_۳+۳x'^۲x''+۳x'x''^۲=x'^۳+x''^۳+۳x'^۲x''+۳x'x''^۲$$

$$S_۳+۳x'x''(x'+x'')=(x'+x'')^۳$$

$$S_۳+۳\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)=\left(-\frac{b}{a}\right)^۳$$

$$S_۳=\frac{۳abc-b^۳}{a^۳}$$

مثال۳ ـ در معادلهٔ درجه دوم $x^۲-۵x+۴=۰$ ابتدا $S_۴$ سپس $S_{-۴}$ را حساب کنید.

$$S_۰=۲$$

$$S_۱=-\frac{b}{a}=۵$$

$$aS_۲+bS_۱+cS_۰=۰$$

$$S_۲-۲۵+۸=۰$$

$$S_۲=۱۷$$

اکنون به‌کمك $S_۲$ و $S_۱$ می‌توان $S_۳$ را حساب کرد:

$$aS_۳+bS_۲+cS_۱=۰$$

$$S_۳-۸۵+۲۰=۰$$

$$S_۳=۶۵$$

حال به‌کمك $S_۳$ و $S_۲$ مقدار $S_۴$ راحساب می‌کنیم:

$$aS_۴+bS_۳+cS_۲=۰$$

$$S_۴-۳۲۵+۶۸=۰$$

$$S_۴=۲۵۷$$

محاسبهٔ $S_{-۴}$:

$$S_{-۴}=x'^{-۴}+x''^{-۴}=\frac{۱}{x'^۴}+\frac{۱}{x''^۴}=\frac{x'^۴+x''^۴}{(x'x'')^۴}$$

یا

$$S_{-۴}=\frac{S_۴}{\left(\frac{c}{a}\right)^۴}=\frac{a^۴S_۴}{c^۴}$$

$$\boxed{S_{-۴}=\frac{۲۵۷}{۲۵۶}}$$

تمرین :

معادلات زیررا حل‌کنید :

۱- $x^2-6x=0$

۲- $x^2-16=0$

۳- $x^2+8x=0$

۴- $4x^2+25=0$

۵- $x^2-8=0$

۶- $3x^2+24=0$

۷- $x^2=9$

۸- $\frac{5}{x}=\frac{x}{5}$

۹- $(x+2)(x+3)=6$

۱۰- $3x^2+24x+21=0$

۱۱- $25x(x+1)=-4$

۱۲- $3x^3-5x+2=0$

۱۳- $4x^2+5x-44=0$

۱۴- $x^2-12x+35=0$

۱۵- $x^2-8x-15=0$

۱۶- $2x^2-5x-12=0$

۱۷- $4(x^2-1)=4x-1$

۱۸- $(2x-3)^2=8x$

۱۹- $\frac{9}{x}-\frac{x}{3}=0$

۲۰- $x+\frac{1}{x-3}=5$

۲۱- $\frac{x-2}{3}=\frac{1}{4(x-3)}$

۲۲- $x^2-5/5x+7/36=0$

۲۳- $y^2-2y\sqrt{3}+1=0$

۲۴- $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x+4}=1$

۲۵- $\frac{2x}{x+2}+\frac{x+2}{2x}=2$

۲۶- $\frac{2x-1}{x+1}=\frac{x+1}{x-2}$

۲۷- $x+\frac{24}{x-1}=3x-4$

۲۸- $\frac{5x+4}{5x-4}+\frac{5x-4}{5x+4}=\frac{13}{6}$

۲۹- $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-1}{x-2}=\frac{2x+1}{x+1}$

۳۰- $\frac{5}{4(x-2)}-\frac{2}{x+3}=\frac{5}{11-3x}$

۳۱- $\frac{x+5}{x-7}+\frac{x-9}{x+3}=\frac{16}{x-7}$

۳۲- $\frac{x^2}{3}-\frac{x}{4}+\frac{1}{8}=\frac{5x^2}{6}+3x-\frac{463}{8}$

۳۳- $\frac{x}{2}-\frac{2(2x-3)}{3(x-1)}+\frac{3x-1}{2(x-1)}=\frac{3(x^2+2)}{2(3x-2)}$

۳۴- $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=\frac{6}{x-6}$

معادلات حرفی زیر را حل‌کنید :

۳۵- $x^2-(a+b)x+ab=0$

۳۶- $x^2-2ax+a^2-b^2=0$

۳۷- $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$

۳۸- $x^2-4bx+4b^2-a^2=0$

۳۹- $a^2x^2-2a^3x+a^4-1=0$

۴۰- $abcx^2-(a^2b^2+c^2)x+abc=0$

۴۱- $12abx^2-(16a^2-9b^2)x-12ab=0$

۴۲- $\frac{(a-x)(x-b)}{(a-x)-(x-b)}=x$

۴۳- $4a^2x=(a^2-b^2+x)^2$

۴۴- $\frac{(a-x)^2-(x-b)^2}{(a-x)(x-b)}=\frac{4ab}{a^2-b^2}$

۴۵- $m^2x^2-(m-n)x-1=n^2x^2+(m-n)x-2 \quad m\neq n$

۴۶- $\frac{\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}}{1-\frac{a-x}{a+x}}=a-1$

۴۷- $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b+x}$

۴۸- $x^2+x+1=\frac{42}{x^2+x}$

۴۹- $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2=8\left(\frac{a-x}{x-b}\right)$

۵۰- $\frac{x-1}{2x-1}+\frac{(2x+1)}{x-1}=m$

تعیین کنید کدامیك از معادلات زیر دارای جوابند . سپس مجموع و حاصل‌ضرب وتفاضل ریشه‌ها وهمچنین علامت ریشه‌ها را معین کنید :

۵۱- $x^2-9x-10=0$ ۵۲- $3x^2-6x+4=0$

۵۳- $4x^2-4x+1=0$ ۵۴- $1-x-x^2=0$

۵۵- $3x^2-5x-22=0$ ۵۶- $5x^2+10x+5=0$

۵۷- $9x^2-6x+1=0$ ۵۸- $2x^2+13=0$

۵۹- $7x^2-6x-1=0$ ۶۰- $5x^2-x+1=0$

۶۱- $6x^2-x-5=0$ ۶۲- $2x^2+x+3=0$

۶۳- $7x^2+7x+\frac{7}{4}=0$ ۶۴- $2x^2+x+8=0$

معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن اعداد زیر باشند:

۶۵- $(2$ و $-0/2)$ ۶۶- $(3$ و $-4)$

۶۷- $(3-\sqrt{2}$ و $3+\sqrt{2})$ ۶۸- $(\sqrt{2}$ و $\sqrt{3})$

۶۹- $(3$ و $\frac{1}{3})$ ۷۰- $(-7$ و $-3)$

۷۱- $\left(a+b\right.$ و $\left.\frac{1}{a+b}\right)$ ۷۲- $a+b$ و $a-b$

۷۳- $\left(\frac{a+b}{a-b}\right.$ و $\left.\frac{a-b}{a+b}\right)$ ۷۴- $\left(\frac{1}{a+b}\right.$ و $\left.\frac{1}{a-b}\right)$

۷۵- $(1$ و $-1)$ ۷۶- $\left(a\right.$ و $\left.\frac{1}{a}\right)$

۷۷- $(a+\sqrt{b}$ و $a-\sqrt{b})$ ۷۸- $\left(4+\frac{2}{\sqrt{5}}\right.$ و $\left.4-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

S و P ، مجموع وحاصل‌ضرب دوعدد معلوم است؛ آن دوعدد را در هریك ازحالات زیر پیدا کنید :

۷۹- $S=28$ و $P=195$

۸۰- $S=18$ و $P=45$

۸۱- $S=14$ و $P=49$

۸۲- $S=4$ و $P=-12$

۸۳- $S=-10$ و $P=16$

۸۴- $S=2\sqrt{2}$ و $P=1$

۸۵- $S=2a$ و $P=a^2-b^2$

۸۶- $S=\frac{a^2+b^2}{ab}$ و $P=1$

به ازای چه مقادیر m یکی از ریشه‌های معادلات زیرصفراست؟ پس‌از تعیین m ریشهٔ دیگر را پیداکنید :

-۸۷ $6x^2+5mx-3m^2+3=0$

-۸۸ $-3x^2+6x-m^2+3=0$

-۸۹ $x^2+10x+m^2+3=0$

-۹۰ $10x^2-5x+3m^2-8m+4=0$

به ازای چه مقادیر m یکی ازریشه‌های معادلات زیر (۲ −) است؟ سپس ریشهٔ دیگر را پیداکنید :

-۹۱ $x^2-2mx+3=0$

-۹۲ $mx^2-x+3m^2-1=0$

-۹۳ $m^2x^2+6x=m^2-16$

-۹۴ $mx^2+2mx-3=0$

-۹۵ $10x^2-7mx+m^2+9=0$

به ازای چه مقادیر b و a هردوریشهٔ معادلات زیر صفر می‌شوند:

-۹۶ $5x^2+ax+b-5=x$

-۹۷ $x^2+(3a-b)x+a^2-4=0$

-۹۸ $2x^2+(a^2-1)x+b^2=0$

-۹۹ $x^2+(a^2+2b+2)x+(4b-6a)=0$

-۱۰۰ $x^2+(a^2+b^2-5)x+a+b+1=0$

به ازای چه مقادیر m معادلات زیر ریشهٔ مضاعف خواهند داشت :

-۱۰۱ $x^2-mx+9=0$ -۱۰۲ $mx^2-3x-1=0$

-۱۰۳ $2x^2+mx-1=0$ -۱۰۴ $2mx^2+3mx+12=0$

-۱۰۵ $(m+2)x^2-2mx+1=0$

-۱۰۶ $(m^2+4)x^2+3x+2=0$

-۱۰۷ $x^2+(m-3)x+1=0$

۱۰۸ - m راچنان تعیین‌کنید که معادلهٔ $3x^2+20x+m=0$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد و ریشه را پیداکنید .

۱۰۹ - m راچنان تعیین‌کنیدکه بین ریشه‌های معادلهٔ : $x^2-15x+m=0$ ، رابطهٔ $2x'=3x''$ برقرار باشد .

۱۱۰ - k را چنان تعیین کنیدکه بین ریشه‌های معادلهٔ : $x^2-kx+36=0$. اولا رابطهٔ $x''=x'$ ثانیاً رابطهٔ $x'=-x''$. ثالثاً رابطهٔ $\frac{5}{12}=\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}$ برقرار باشد . در هر حالت ریشه ها را حساب‌کنید .

۱۱۱ - k را چنان تعیین کنیدکه‌بین ریشه‌های معادلهٔ : $x^2-8x+k=0$، اولا رابطهٔ $x'=x''$ ، ثانیاً رابطهٔ $x'=3x''$، ثالثاً رابطهٔ $x'=\frac{1}{x''}$، رابعاً رابطهٔ $x'=-\frac{1}{x''}$ برقرار باشد . درهر حالت ریشه‌ها رامعین‌کنید .

۱۱۲ - k راچنان تعیین‌کنیدکه یکی‌از ریشه‌های معادلهٔدرجه دوم: $4x^2-15x+k=0$ مربع دیگری باشد .

۱۱۳ - k راچنان تعیین‌کنیدکه مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ : $x^2-5x+k=0$ برابر ۱۳ شود .

۱۱۴ - k راچنان تعیین‌کنیدکه بین ریشه‌های معادلهٔ : $3x^2-kx+2=0$ رابطهٔ $3x'x''=2x'-2x''$ بر قراز باشد .

۱۱۵ - درمعادلهٔ $3x^2-10x+k=0$ ، k راطوری تعیین‌کنید کەیکی ازریشه‌های این معادله برابر ۲ باشد .

۱۱۶ ـ k راچنان تعیین کنیدکه ریشه‌های معادلهٔ :

$8x^2-(k-1)x+k-7=0$ اولا مساوی ، ثانیاً قرینه، ثالثاً عکس یکدیگر باشند . ضمناً رابطهٔ مستقلی از k بین ریشه‌های معادله پیدا کنید .

۱۱۷ـ رابطهٔمستقلی از m بین‌ریشه‌های معادلهٔدرجه دوم‌زیر‌پیداکنید.

$$(3-m)x^2-(5+4m)x+m-2=0$$

۱۱۸ ـ معادلهٔ درجه دومی بنویسیدکه بین ریشه‌های آن روابط زیر برقرار باشد :

الف -
$$\begin{cases} x'^2+x''^2=5 \\ x'x''=2 \end{cases}$$

ب -
$$\begin{cases} x'x''+x'+x''-m=0 \\ x'x''-m(x'+x'')+1=0 \end{cases}$$

ج -
$$\begin{cases} x'x''^2+x''x'^2=6 \\ x'+x''=3 \end{cases}$$

۱۱۹ ـ مجموع مجذورات ومکعبات ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم :
$2x^2-7x+6=0$ را پیداکنید .

۱۲۰ ـ m راچنان تعیین کنیدکه مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ :
$x^2+(m-2)x-(m+3)=0$ ، مساوی ۲۵ شود و ریشه‌های معادله را به ازای این مقدار m بدست آورید .

۱۲۱ ـ ضرایب a و b را چنان تعیین کنیدکه تفاضل ریشه‌های معادلهٔ $x^2+ax+b=0$ ، مساوی ۴ و تفاضل مکعبات ریشه‌ها مساوی ۲۰۸ شود .

۱۲۲ ـ معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-mx-2=0$ مفروض است .

اولاً معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ فوق باشد .

ثانیاً معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسیدکه ریشه‌های آن عکس ریشه‌های معادلهٔ فوق‌باشد .

ثالثاً معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسیدکه ریشه‌های‌آن دوبرابر ریشه‌های معادلهٔ فوق باشد .

رابعاً معادلهٔ درجهٔ دومی‌بنویسیدکه ریشه‌های آن دو واحد بیش از ریشه‌های معادلهٔ فوق باشد .

۱۲۳ ـ معادلهٔ درجهٔ دوم: $(2m-1)x^2+2(1-m)x+3m=0$ مفروض است. m راچنان‌تعیین‌کنیدکه :

اولاً ـ یك ریشهٔ معادله برابر (۱ -) باشد .

ثانیاً ـ مجموع مربعات ریشه‌ها، مساوی ۴ باشد .

فصل هشتم

تجزیهٔ سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم ـ علامت سه جمله‌ای درجهٔ دوم ـ نامعادله های درجهٔ دوم

I ـ تجزیهٔ سه جمله‌ای درجهٔ دوم به حاصل ضرب عاملهای درجهٔ اول

۱ ـ صورت کلی سه جمله‌ای درجهٔ دوم چنین است :

$$ax^2+bx+c$$

می‌خواهیم این عبارت را به حاصل ضرب دو پرانتز که هر یك شامل عبارتی درجهٔ اول برحسب x باشد تجزیه کنیم .

چون $a\neq 0$ ، می‌توان از a فاکتور گرفت :

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

اگر به عبارت داخل پرانتز، جملهٔ $\frac{b^2}{4a^2}$ را اضافه وهمین جمله را از آن کم کنیم، مقدار داخل پرانتز تغییر نمی‌کند :

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$$

یا

$$(I)\qquad ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$$

الف - اگر b^2-4ac یعنی مبین سه جمله‌ای درجهٔ دوم منفی باشد، چون $4a^2$ همواره مثبت است ، پس کسر $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ منفی می‌شود ودر نتیجه $-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ مثبت خواهد شد ؛ بعلاوه مقدار:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

همیشه مثبت است ، پس عبارت داخل کروشهٔ طرف دوم رابطهٔ (I) ، مجموع دو مقدار مثبت است و در این حالت **نمی‌توان سه‌جمله‌ای را تجزیه کرد** .

ب ـ اگر $b^2-4ac=0$ باشد، کسر $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ صفرمی‌شود درنتیجه رابطهٔ (I) به صورت زیردر می‌آید :

$$(II)\qquad ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

اما وقتی $b^2-4ac=0$ باشد، ریشهٔ مضاعف معادلهٔ :

$$ax^2+bx+c=0$$

عبارت است از:

$$x'=x''=-\frac{b}{2a}$$

پس رابطهٔ (II) را می‌توان چنین نوشت:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=a(x-x')^2$$

یعنی: درحالت $\Delta=0$ سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم تجزیه می‌شود.

ج- اگر $b^2-4ac>0$ باشد. کسر $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ مثبت است ومی‌توان آن را مساوی k^2 فرض‌کرد. پس:

$$k=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

با این فرض، رابطهٔ (I) را می‌توان چنین نوشت:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-k^2\right]$$

عبارت داخل‌کروشه را می‌توان تجزیه کرد:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}+k\right)\left(x+\frac{b}{2a}-k\right)$$

یا

$$ax^2+bx+c=a\left[x-\left(-\frac{b}{2a}-k\right)\right]\left[x-\left(-\frac{b}{2a}+k\right)\right]$$

درطرف دوم رابطهٔ اخیر، به جای k مقدارش راقرارمی‌دهیم.

$$ax^2+bx+c=$$

$$a\left[x-\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]\left[x-\left(-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]=$$

$$a\left[x-\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]\left[x-\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]$$

کسرهای داخل دو کروشهٔ اخیر، همان x' و x'' ریشه های

معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ هستند و با توجه به این معنی، صورت نهایی سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم در این حالت چنین خواهد بود:

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')$$

ازآنچه گفته شد نتیجه می‌گیریم‌که:

اولاً- هرگاه $\Delta=0$ باشد، سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم به صورت:

$$a(x-x')^2$$

تجزیه می‌شود.

ثانیاً- هرگاه $\Delta>0$ باشد، سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم به صورت:

$$a(x-x')(x-x'')$$

تجزیه می‌شود.

ثالثاً- هرگاه $\Delta<0$ باشد، سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم تجزیه نخواهد شد.

مثال ۱- عبارت $2x^2-7x+3$ را به‌حاصل‌ضرب عوامل‌تجزیه کنید:

$$\Delta=b^2-4ac=49-24=25>0$$

پس سه جمله‌ای تجزیه می‌شود. لازم است سه‌جمله‌ای را مساوی صفرقرار دهیم و ریشه‌های آن را بدست‌آوریم:

$$2x^2-7x+3=0$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{25}}{4}$$

$$x'=\frac{7-5}{4}=\frac{1}{2}$$

$$x''=\frac{7+5}{4}=3$$

پس سه‌جمله‌ای مفروض به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$2x^2-7x+3=2(x-\frac{1}{2})(x-3)=(2x-1)(x-3)$$

مثال۲ ـ سه‌جمله‌ای : $-4x^2+4x-1$ را تجزیه کنید .

$$\Delta=b^2-4ac=16-16=0$$

چون $\Delta=0$ است ، سه‌جمله‌ای به صورت : $a(x+\frac{b}{2a})^2$

تجزیه می‌شود :

$$-4x^2+4x-1=-4\left(x+\frac{4}{-8}\right)^2=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=$$
$$-(2x-1)^2$$

مثال۳ ـ سه‌جمله‌ای : $5x^2-6x+7$ را تجزیه کنید .

چون مبین سه‌جمله‌ای منفی است، سه‌جمله‌ای تجزیه نمی‌شود.

۴ ـ ساده کردن کسرها ـ چنانچه صورت ومخرج کسری تجزیه‌پذیر باشد ، می‌توان هر یك را به حاصل ضرب عوامل تجزیه کرد ، سپس باحذف عوامل مشترك ازصورت ومخرج، کسر راساده یاغیرممکن‌التحویل کرد .

مثال ـ کسر $\frac{4x^2-5x-6}{4x^2+7x+3}$ را ساده کنید .

$$4x^2-5x-6=0$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25+96}}{8}$$

$$x'=-\frac{3}{4}$$

$$x''=2$$

حاصل تجزیهٔ صورت : $4x^2-5x-6=4(x+\frac{3}{4})(x-2)$

$$4x^2+7x+3=0$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{8}$$

$$x'=-1$$

$$x''=-\frac{3}{4}$$

حاصل تجزیهٔ مخرج : $4x^2+7x+3=4(x+\frac{3}{4})(x+1)$

$$\frac{4x^2-5x-6}{4x^2+7x+3}=\frac{4(x+\frac{3}{4})(x-2)}{4(x+\frac{3}{4})(x+1)}=\frac{x-2}{x+1}$$

II ـ تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم :

۳ ـ سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم $x^2-5x-24$ رادر نظر می‌گیریم.

حاصل این سه‌جمله‌ای به ازای جمیع مقادیر x که کوچکتر از (-3)

باشند ،(از ۳ − تا ∞ −) وهمچنین به ازای کلیهٔ مقادیر x که بزرگتر از (۸+) باشند ، (از۸+ تا ∞ +) ، همواره مثبت است. بطور مثال دوعدد(۶−) و۱۰ را امتحان می‌کنیم .

حاصل سه‌جمله‌ای به ازای۶− = x :

$$x^۲-۵x-۲۴=(-۶)^۲-۵(-۶)-۲۴=۴۲$$

حاصل سه‌جمله‌ای به ازای ۱۰ = x :

$$x^۲-۵x-۲۴=۱۰^۲-۵\times۱۰-۲۴=۲۶$$

حاصل همین سه‌جمله‌ای به ازای جمیع مقادیر x واقع بین (۸+ و ۳−) منفی است ، مثلا :

حاصل سه‌جمله‌ای به ازای ۱− = x و ۷ = x بترتیب چنین می‌شود :

$$x^۲-۵x-۲۴=(-۱)^۲-۵(-۱)-۲۴=-۱۸$$

$$x^۲-۵x-۲۴=۷^۲-۵\times۷-۲۴=-۱۰$$

مقصود از تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم این است که معین کنیم سه‌جمله‌ای به‌ازای چه‌مقادیر x مثبت یا منفی‌است .

۴ ـ تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c$:

برای تعیین‌علامت سه‌جمله‌ای‌نامبرده، ازتجزیهٔ همین‌سه‌جمله‌ای به حاصل‌ضرب عاملهای درجهٔ اول‌استفاده می‌کنیم .

الف ـ دیدیم وقتی مبین‌سه‌جمله‌ای منفی است ، سه جمله‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود .

$$ax^۲+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^۲-\frac{b^۲-۴ac}{۴a^۲}\right]$$

با این فرض ، عبارت داخل کروشه به ازای جمیع مقادیر x و ضرایب a و b و c ، مثبت است .

هرگاه $a>۰$ باشد ، $ax^۲+bx+c$ هم مثبت است و اگر $a<۰$ باشد ، حاصل ضربش در کروشهٔ مثبت ، منفی خواهد شد، پس می‌توان گفت :

وقتی‌که $\Delta<۰$ باشد،علامت سه‌جمله‌ای‌درجهٔ دوم‌به ازای جمیع مقادیر x موافق علامت a (ضریب جملهٔ درجهٔ دوم)است.

ب ـ وقتی $\Delta=۰$ باشد ، دیدیم که سه‌جمله‌ای به صورت زیر در می‌آید :

$$ax^۲+bx+c=a(x-x')^۲$$

(x' ریشهٔ مضاعف سه‌جمله‌ای است) ؛ اگر x از ریشهٔ مضاعف کوچکتر یا بزرگتر باشد، وقتی که $(x-x')$ را مجذور کنیم ،حاصل مثبت خواهد شد . چنانچه $a>۰$ باشد ، حاصل ضرب آن در مقدار مثبت $(x-x')^۲$ ، مثبت می‌شود و چنانچه $a<۰$ باشد ، حاصل ضرب آن درپرانتز مثبت نامبرده ، منفی می‌شود ، پس‌می‌توان گفت :

وقتی‌که $\Delta=۰$ باشد،علامت سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم‌به ازای جمیع مقادیر x موافق علامت a است .

ج ـ وقتی‌که $\Delta>۰$ باشد همان‌طور که‌قبلاً دیده‌ایم، سه‌جمله‌ای به‌ صورت زیر تجزیه می‌شود :

$$ax^۲+bx+c=a(x-x')(x-x'')$$

که در آن x' و x'' عبارتند ازدو ریشه‌ای که ازحل معادلهٔ :

$$ax^2+bx+c=0$$

بدست می‌آیند و به علت مثبت بودن مبین ، این دو ریشه حقیقی و اعدادی مشخص و متمایزند ؛ ولی x می‌تواند عددی کوچکتر از دو ریشه یا بزرگتراز دو ریشه یا عددی بین‌دو ریشه باشد .

اولاً ـ اگر x ازهردو ریشه بزرگترباشد ،پرانتزهای :

$(x-x'')$ و $(x-x')$

هردومثبتند وحاصل ضرب آنها نیز مثبت می‌شود ؛ چنانچه $a>0$ باشد ، حاصل سه‌جمله‌ای مثبت وچنانچه $a<0$ باشد ، حاصل سه‌جمله‌ای منفی خواهد شد . پس می‌توان گفت :

به ازای مقادیری از x که ازهردو ریشهٔ سه‌جمله‌ای بزرگتر باشند ، علامت سه‌جمله‌ای موافق علامت a است .

ثانیاً ـ اگر x ازهردوریشه‌کوچکتر باشد ، پرانتزهای :

$(x-x'')$ و $(x-x')$

هردومنفی و حاصل‌ضرب آنها مثبت می‌شود ؛ اگر $a>0$ باشد ، حاصل سه‌جمله‌ای مثبت و اگر $a<0$ باشد ، حاصل سه‌جمله‌ای منفی است .

پس :

به ازای مقادیری‌از x که‌ازهردوریشهٔ سه‌جمله‌ای کوچکتر باشند ، علامت سه‌جمله‌ای موافق علامت a است .

ثالثاً ـ اگر x بین x'' و x' واقع باشد، واضح است‌که x ازیك

ریشه بزرگتر واز دیگری کوچکتر است ؛ درنتیجه یکی ازپرانتزهای

$(x-x'')$ و $(x-x')$

مثبت و دیگری منفی خواهد شد و حاصل ضرب این دو پرانتز منفی می‌شود ؛ اگر $a>0$ باشد، حاصل سه‌جمله‌ای منفی واگر $a<0$ باشد، حاصل سه‌جمله‌ای مثبت خواهد شد. پس می‌توان گفت :

به‌ازای‌جمیع‌مقادیر x واقع بین دو ریشه،علامت‌سه‌جمله‌ای مخالف علامت a است .

از آنچه گفته شد نتیجه می‌گیریم:

علامت سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم ، به ازای جمیع مقادیر x موافق علامت a (ضریب جملهٔ درجهٔ دوم) است ، مگر وقتی‌که مقدار x بین دو ریشه واقع باشد ،که در این صورت علامت سه‌جمله‌ای مخالف علامت a است .

تبصره ـ بطوراختصار مقادیری از x راکه از x' و x'' بزرگتر یاکوچکترند، مقادیر **خارج‌ریشه‌ها** می‌گویند .

مثال۱ ـ علامت x^2+x+1 را تعیین‌کنید .

چون مبین این سه جمله‌ای منفی است ، علامت سه جمله‌ای به ازای جمیع مقادیر x موافق علامت a ، ضریب x^2 ، است ؛ یعنی سه‌جمله‌ای مفروض همواره مثبت است .

مثال۲ ـ علامت $-x^2+2x-1$ را معین کنید .

مبین این سه‌جمله‌ای صفر است ؛ ریشهٔ مضاعف راپیدا می‌کنیم :

$$x'=x''=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{-2}=1$$

علامت سه‌جمله‌ای به ازای جمیع مقادیر x موافق علامت a است و چون a در این مثال منفی است ، سه‌جمله‌ای مفروض به ازای جمیع مقادیر x منفی است مگر به ازای $x=1$ که مقدارش برابر صفر است .

مثال ۳ ـ علامت x^2-5x+4 را تعیین کنید .

چون مبین این سه‌جمله‌ای مثبت است ، باید ریشه‌ها را معین کنیم :

$$x^2-5x+4=0$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}$$

$$x'=\frac{5-3}{2}=1$$

$$x''=\frac{5+3}{2}=4$$

معادله دارای ریشه‌های ۱ و ۴ است . اگر x بین (۴ و ۱) باشد، علامت سه‌جمله‌ای مخالف علامت a یعنی سه‌جمله‌ای مفروض منفی است. چنانچه مقدار x خارج ریشه‌ها باشد ، سه‌جمله‌ای مفروض مثبت است، یعنی :

به ازای $1<x<4$ داریم :

$$x^2-5x+4<0$$

وبه ازای $x<1$ یا $x>4$ داریم :

$$x^2-5x+4>0$$

می‌توان خلاصهٔ این بحث‌را به صورت‌جدول هم‌نمایش داد :

x	$-\infty$		۱		۴		$+\infty$
x^2-5x+4	+	+	0	−	0	+	+

III ـ حل نامعادلات درجهٔ دوم

۵ ـ صورت‌کلی‌نامعادلات درجهٔ دوم عبارت است از :

$$ax^2+bx+c>0$$

یا

$$ax^2+bx+c<0$$

مقصود ازحل نامعادله ، تعیین حدود x است بطوری که جمیع مقادیر x واقع درآن حدود ، درنامعادله صدق کنند؛به عبارت دیگر، تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم است بطوری که با جهت نامعادله مطابقت داشته باشد .

مثال ۱ ـ نامعادلهٔ : $x^2+x-6>0$ راحل‌کنید .

حل ـ ابتدا علامت سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم طرف اول نامعادله را معین می‌کنیم . چون مبین مثبت است ، پس ریشه‌ها را بدست می‌آوریم :

$$x^2+x-6=0$$

$$x'=-3$$

و

$$x''=2$$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
x^2+x-6	+	+	0	−	0	+	+

واضح‌است اگر $x>2$ یا $x<-3$ باشد. سه‌جمله‌ای x^2+x-6 مثبت است، پس جواب نامعادله $\begin{cases} x>2 \\ x<-3 \end{cases}$ است .

مثال۲ ـ نامعادلهٔ : $-x^2+6x-9>0$ را حل کنید .

حل :

$$-x^2+6x-9=0$$

$$x'=x''=3$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$-x^2+6x-9$	− −	− −	0	− −	− −

سه‌جمله‌ای مفروض به ازای جمیع مقادیر x به جز $x=3$ ، منفی است، پس نامعادله دارای جواب نیست .

مثال۳ ـ نامعادلهٔ $\frac{7x^2-5}{8x^2+3}<4$ را حل کنید .

حل ـ ابتدا تمام جمله‌ها را به یك طرف نقل می‌کنیم و مخرج مشترك می‌گیریم :

$$\frac{7x^2-5}{8x^2+3}-4<0$$

$$\frac{-25x^2-17}{8x^2+3}<0$$

چون سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم ناقص $(-25x^2-17)$ دارای جواب نیست (a و c متحدالعلامه‌اند) علامت صورت موافق علامت a است ، یعنی صورت همواره منفی است . $8x^2+3$ نیز دارای جواب نیست و علامت آن همواره مثبت است . پس کسر $\frac{-25x^2-17}{8x^2+3}$ به ازای جمیع مقادیر x منفی است. یعنی جمیع اعداد می‌توانندجواب نامعادله باشند .

مثال۴ ـ مطلوب است حل نامعادلهٔ : $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}>1$

حل :

$$\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}-1>0$$

$$\frac{2(2x-5)}{(x-3)(x-4)}>0$$

تنها ریشهٔ صورت ، $x=2/5$ و ریشه‌های مخرج ۳ و ۴ است. ازجدول زیر علامت کسر ودر نتیجه جواب نامعادله بدست می‌آید :

x	$-\infty$	$2/5$		3		4		$+\infty$
$2(2x-5)$	− −	0	+ +	|	+ +	|	+ +	
$(x-3)(x-4)$	+ +	|	+ +	0	− −	0	+ +	
نامعادله	− −	0	+ + (جواب)	∞	− −	∞	+ + (جواب)	

جواب نامعادله : $\begin{cases} x>4 \\ 2/5<x<3 \end{cases}$ است .

مثال۵ ـ مطلوب است حل دستگاه نامعادلات :

$$\begin{cases} 2x^2-3x-2>0 \\ -x^2+1<0 \end{cases}$$

حل ـ جوابهای هریك از نامعادلات رامعین می‌کنیم . ازمقایسهٔ جوابها ، جواب دستگاه بدست می‌آید :

$$2x^2-3x-2=0$$

$$x'=-\frac{1}{2}$$

$$x''=2$$

$$-x^2+1=0$$

$$x'=-1$$

$$x''=1$$

x	$-\infty \quad -1$	$-\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
$2x^2-3x-2$	+ + جواب	+ + جواب	− −	− −	+ + جواب
$-x^2+1$	− − جواب	+ +	+ +	− − جواب	− − جواب
نتیجه	جواب				جواب

جوابهای دستگاه عبارتند از : $\begin{cases} x>2 \\ x<-1 \end{cases}$

مثال۶ ـ حدود x راطوری تعیین کنیدکه‌کسر :

$\frac{x^2-13x+22}{x^2-12x+32}$ محصور بین -1 و $+1$ باشد .

حل ـ یعنی باید داشته باشیم :

$$-1<\frac{x^2-13x+22}{x^2-12x+32}<1$$

این نامعادلات مضاعف را می‌توان به‌صورت دستگاه زیرنوشت:

$$\begin{cases} \frac{x^2-13x+22}{x^2-12x+32}>-1 \\ \frac{x^2-13x+22}{x^2-12x+32}<1 \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} \frac{x^2-13x+22}{x^2-12x+32}+1>0 \\ \frac{x^2-13x+22}{x^2-12x+32}-1<0 \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} \frac{2x^2-25x+54}{x^2-12x+32}>0 \\ \frac{-x-10}{x^2-12x+32}<0 \end{cases}$$

$$2x^2-25x+54=0$$

$$x=\frac{25\pm\sqrt{193}}{4}$$

$$x' = \frac{۱}{۴}(۲۵ - \sqrt{۱۹۳}) \# ۲/۷۵$$
$$x'' = \frac{۱}{۴}(۲۵ + \sqrt{۱۹۳}) \# ۹/۷۵$$

$$x^۲ - ۱۲x + ۳۲ = ۰$$

$$x' = ۴$$
$$x'' = ۸$$

$$-x - ۱۰ = ۰$$

$$x = -۱۰$$

x	$-\infty$ ، -۱۰	$\frac{۱}{۴}(۲۵-\sqrt{۱۹۳})$ (۲/۷۵)	۴	۸	$\frac{۱}{۴}(۲۵+\sqrt{۱۹۳})$ (۹/۲۵) ، $+\infty$
$۲x^۲ - ۲۵x + ۵۴$	+	+ + ○	—	—	— — ○	+ +
$x^۲ - ۱۲x + ۳۲$	+	+ +	+ + ○	— ○	+ +	+ +
نامعادله اوّل	+ جواب	+ + جواب	— —	+ جواب	— —	+ + جواب
$-x - ۱۰$	+ ○	— —	— —	—	— —	— —
$x^۲ - ۱۲x + ۳۲$	+	+ +	+ + ○	— ●	+ +	+ +
نامعادله دوّم	+	— — جواب	— — جواب	+	— — جواب	— — جواب
نتیجه		جواب				جواب

جواب دستگاه عبارت است از : $-۱۰ < x < \frac{۱}{۴}(۲۵ - \sqrt{۱۹۳})$

و $x > \frac{۱}{۴}(۲۵ + \sqrt{۱۹۳})$

مثال۷ ـ معین کنید عبارت : $\sqrt{\dfrac{x^۲ - ۳x + ۲}{x^۲ + ۷x + ۱۲}}$ به ازای چه مقادیری از x موهومی نیست .

حل ـ می‌دانیم مقدار رادیکال در صورتی موهومی نیست که عبارت زیر رادیکال مثبت یاصفر باشد ؛ پس باید علامت کسر واقع در زیر رادیکال راتعیین کنیم، یعنی نامعادلهٔ کسری :

$$\frac{x^۲ - ۳x + ۲}{x^۲ + ۷x + ۱۲} \geqslant ۰$$

را حل‌کنیم .

$$x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$$

$$x' = ۱$$
$$x'' = ۲$$

$$x^۲ + ۷x + ۱۲ = ۰$$

$$x' = -۴$$
$$x'' = -۳$$

x	$-\infty$ ، -۴	-۳	۱	۲ ، $+\infty$	
$x^۲ - ۳x + ۲$	+	+	+ ○	— ○	+
$x^۲ + ۷x + ۱۲$	+ ○	— ○	+	+	+
نتیجه	+	—	+ ○	— ○	+

رادیکال وقتی دارای معنی است که $x<-4$ یا $-3<x\leq 1$ یا $2\leq x$ باشد .

تمرین

سه‌جمله‌ایهای زیررا به حاصلضرب عوامل تجزیه‌کنید :

۱- $x^2-9x+18$ ۲- $x^2+3x-28$

۳- $3x^2-21x+36$ ۴- $2x^2-12x+18$

۵- $-2x^2+3x+2$ ۶- $x^2-12x+35$

۷- $4x^2+5x-44$ ۸- $x^2-2ax+a^2-b^2$

۹- $x^2-(a+b)x+ab$

۱۰- $a^2x^2-2a^3x+a^4-1$

۱۱- $12abx^2-(16a^2-9b^2)x-12ab$

۱۲- $abcx^2-(a^2b^2+c^2)x+abc$

۱۳- $(a^2-4b^2)x^2+2(a^3+2b^3)x+a^4-b^4$

کسرهای زیر را ساده‌کنید :

۱۴- $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x-5}$ ۱۵- $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$

۱۶- $\dfrac{x^2+10x+21}{2x^2+12x+18}$ ۱۷- $\dfrac{2x^2-2x-12}{3x^2+x-12}$

۱۸- $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+6x-9}$ ۱۹- $\dfrac{x^3-4x}{4x^3-4x^2-8x}$

۲۰- $\dfrac{x^2-1+a^2-2ax}{x^2+a^2-2ax+a-x-2}$

۲۱- $\dfrac{abx^2-(a+b)x+1}{a^2x^2-a^2bx+ab-1}$

علامت عبارات زیررا معین‌کنید :

۲۲- $-x^2+8x-12$ ۲۳- $x^2-8x+12$

۲۴- $-x^2+8x-16$ ۲۵- $x^2-8x+16$

۲۶- $-2x^2-16x-40$ ۲۷- $2x^2-16x+40$

۲۸- $(x+1)(2x^2-4x+1)$

۲۹- $2x^2-16x-40$

۳۰- $(x^3-4x^2)(x^2-2x-3)$

۳۱- $(3x+8)(x^2-4x+4)(x^3-1)$

۳۲- $(2x+8)^2(2x^2-8)$

۳۳- حدود m را بطریقی تعیین‌کنیدکه سه جمله‌ای :
$mx^2+(m-1)x+m-1$ به ازای جمیع مقادیر x منفی باشد .

۳۴- حدود m را بطریقی معین‌کنیدکه سه جمله‌ایهای:

$$\begin{cases}(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6\\(4-m)x^2-3x+m+4\end{cases}$$

همواره مثبت باشند .

۳۵- حدود x را طوری تعیین‌کنید که هریك از رادیکالهای $\sqrt{2x+3-x^2}$ و $\sqrt{2x^2+3x+9}$ دارای معنی باشند .

۳۶ - حدود x را بطریقی تعیین کنید که کسر $\dfrac{x^2+x-1}{x^2+5x+4}$ محصور بین ۱− و ۱+ باشد .

۳۷ - حدود x را بطریقی تعیین کنید که کسر $\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$ محصور بین ۲− و ۲+ باشد.

دستگاههای نامعادلات زیررا حل کنید :

-۳۸ $\begin{cases} 5x^2-7x<0 \\ x^2-11x+30<0 \end{cases}$

-۳۹ $\begin{cases} x^2-12x+32>0 \\ x^2-13x+3<0 \end{cases}$

-۴۰ $\begin{cases} x^2-1<0 \\ x^3-2x^2+2x-1<0 \end{cases}$

-۴۱ $\begin{cases} x^3-11x^2+10x>0 \\ x^3-12x^2+32x>0 \end{cases}$

-۴۲ $\begin{cases} (x-1)(-x^2+6x-9)>0 \\ (x+1)(x^2-3x+7)<0 \end{cases}$

فصل نهم

حل معادلاتی که به درجهٔ دوم تبدیل‌پذیرند

۱ ـ هرگاه درجهٔ معادله‌ای ، پس‌ازحذف مخرجها و رادیکالها ونقل تمام جمله‌ها به‌یك طرف وساده کردن ، بیش از ۲ باشد و بتوان طرف اول آن‌را به‌حاصل‌ضرب عاملهای درجهٔ اول و دوم تبدیل کرد، چنین معادله را **تبدیل پذیر** گویند .

الف‌ـ معادلاتی‌که باانتخاب مجهول‌معاون مناسب می‌توان حل‌کرد :

اگر در معادله‌ای بتوانیم عبارتی را که شامل حرف مجهول است ، مجهول جدید قرار دهیم بطوری که معادلهٔ حاصل فقط شامل مجهول جدید وحد اکثر از درجهٔ دوم باشد ، معادله با مجهول جدید قابل حل است .

مثال۱ ـ مطلوب است حل‌معادلهٔ :

$$(I) \qquad (x^{۲}-۵x)^{۲}-۷(x^{۲}-۵x)+۶=۰$$

حل ـ فرض می‌کنیم :

$$(II) \qquad x^{۲}-۵x=y$$

درنتیجه معادلهٔ (I) به صورت زیر در می‌آید :

$$\text{(III)} \qquad y^2 - 7y + 6 = 0$$

معادلهٔ (III) را **معادلهٔ حلال** می‌نامند و ریشه‌های آن عبارتند از:

$$y' = 1$$

و

$$y'' = 6$$

حال هر يك از مقادیر y را که از حل معادلهٔ حلال بدست آمده‌اند، در معادلهٔ (II) به جای y قرار داده و معادلات حاصل را به شرح زیر حل می‌کنیم:

$$\text{(E)} \qquad x^2 - 5x = 6$$

$$\text{(E')} \qquad x^2 - 5x = 1$$

ریشه‌های معادلهٔ (E):
$$\begin{cases} x' = -1 \\ x'' = 6 \end{cases}$$

ریشه‌های معادلهٔ (E'):

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{29}) \\ x'' = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{29}) \end{cases}$$

مثال۲ ـ مطلوب است حل معادلهٔ:

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - \left(x+\frac{1}{x}\right) - 10 = 0$$

حل ـ با فرض $x+\frac{1}{x}=y$ (I) چنین خواهیم داشت:

معادلهٔ حلال: $2y^2 - y - 10 = 0$

جوابهای معادلهٔ حلال عبارت است از:

$$y' = -2 \quad \text{و} \quad y'' = \frac{5}{2}$$

برای تعیین جوابهای معادلهٔ اصلی، هر يك از جوابهای معادلهٔ حلال را در رابطهٔ (I) به جای y قرار می‌دهیم و معادلات حاصل را به شرح زیر حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x+\frac{1}{x} = -2 \\ x+\frac{1}{x} = \frac{5}{2} \end{cases} \quad \text{و}$$

یا

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0 & \text{(E)} \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0 & \text{(E')} \end{cases}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-1}}{1}$$

ریشه‌های معادلهٔ (E): $\{x' = x'' = -1$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4}$$

ریشه‌های معادلهٔ (E'):
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2} \\ x'' = 2 \end{cases}$$

مثال۳ ـ معادلهٔ $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x-\frac{1}{x}\right)+1=0$ را حل کنید.

فرض می‌کنیم $x-\frac{1}{x}=y$ (I) باشد ؛ طرفین تساوی (I) را مجذور می‌کنیم :

$$x^2+\frac{1}{x^2}-2=y^2$$

یا

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2 \qquad \text{(II)}$$

با توجه به روابط (I) و (II) ، معادلهٔ مفروض به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$y^2+2+4y+1=0$$

معادلهٔ حلال: $y^2+4y+3=0$

جوابهای معادلهٔ حلال عبارتند از :

$$y=-2\pm\sqrt{4-3}$$

$$y'=-3$$

$$y''=-1$$

برای تعیین جوابهای معادلهٔ اصلی ، هریک از جوابهای معادلهٔ حلال را در رابطهٔ (I) به جای y قرارمی‌دهیم و معادلات حاصل‌را به شرح زیر حل می‌کنیم :

$$\begin{cases} x-\frac{1}{x}=-3 \\ x-\frac{1}{x}=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+3x-1=0 & \text{(E)} \\ x^2+x-1=0 & \text{(E')} \end{cases}$$

ریشه‌های معادلهٔ (E) :

$$\begin{cases} x'=-\frac{1}{2}(\sqrt{13}+3) \\ x''=\frac{1}{2}(\sqrt{13}-3) \end{cases}$$

ریشه‌های معادلهٔ (E') :

$$\begin{cases} x'=-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) \\ x''=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \end{cases}$$

مثال۴ ـ معادلهٔ $2x-5x^{\frac{1}{2}}+2=0$ را حل‌کنید .

حل ـ فرض می‌کنیم $x^{\frac{1}{2}}=y$ (I) باشد .

طرفین رابطهٔ (I) را مجذور می‌کنیم :

$$x=y^2 \qquad \text{(II)}$$

با توجه‌به روابط (I) و (II) ، معادلهٔ اصلی به‌صورت زیرنوشته می‌شود :

معادلهٔ حلال : $2y^2-5y+2=0$

جوابهای معادلهٔ حلال عبارتند از :

$$y=\frac{۵\pm\sqrt{۲۵-۱۶}}{۴}$$

$$y'=\frac{۱}{۲}$$

$$y''=۲$$

برای تعیین جوابهای معادلهٔ اصلی ، هریك از جوابهای معادلهٔ حلال را در رابطهٔ (I) یا (II) به جای y قرار می‌دهیم و معادلات حاصل را به شرح زیر حل می‌کنیم :

$$\begin{cases} x^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲} & (E) \\ x^{\frac{۱}{۲}}=۲ & (E') \end{cases}$$

جواب معادلهٔ (E) : $x=\frac{۱}{۴}$

جواب معادلهٔ (E') : $x=۴$

ب ـ حل معادلات دوجمله‌ای

صورت کلی معادلات دوجمله‌ای چنین است :

$$ax^p+bx^q=۰$$

دراین معادله با فرض $p>q$ می‌توان از x^q فاکتورگرفت :

$$x^q(ax^{p-q}+b)=۰$$

حاصلضرب دو عامل طرف اول رابطهٔ اخیر به ازای جوابهای دومعادلهٔ زیر صفر می‌شود :

$$x^q=۰$$

و $ax^{p-q}+b=۰$

و ازآنجا : $x=۰$

و $x=\sqrt[p-q]{-\frac{b}{a}}$

هرگاه b و a مختلف‌العلامه باشند ، چون مقدار زیر رادیکال مثبت می‌شود ، معادله غیر از جوابهای فوق ، جواب خواهد داشت .
چنانچه $(p-q)$ عددی زوج باشد ، دو جواب قرینه بدست می‌آید .
چنانچه $(p-q)$ عددی فرد باشد ، یك جواب مثبت بدست می‌آید .

اگر b و a متحدالعلامه باشند ، معادله غیر از جوابهای $x=۰$ وقتی جواب حقیقی دیگر خواهد داشت که $(p-q)$ فرد باشد و این جواب هم منفی است .

مثال ۱ـ مطلوب است حل معادلهٔ : $x^۴-۳۶x^۲=۰$.

حل : $x^۲(x^۲-۳۶)=۰$

$$x^۲=۰$$

$$x_۱=x_۲=۰$$

$$x^۲-۳۶=۰$$

$$x=-۶$$

$$x=+۶$$

معادله دارای ریشهٔ مضاعف صفر وجوابهای (±۶) است .

مثال۲ ـ معادلهٔ $x^5+8x^2=0$ را حل کنید .

حل :

$$x^2(x^3+8)=0$$

$$x^2=0$$

$$x_1=x_2=0$$

$$x^3+8=0$$

$$x^3=-8$$

$$x=-2$$

معادله دارای ریشهٔ مضاعف صفر وجواب (۲−) است.

مثال۳ ـ معادلهٔ $x^5+8x^3=0$ را حل کنید .

حل :

$$x^3(x^2+8)=0$$

$$x^3=0$$

$$x_1=x_2=x_3=0$$

اما معادلهٔ $x^2+8=0$ جواب ندارد .

پس معادله دارای سه ریشهٔ برابر صفر است .

ج ـ حل معادلات سه جمله‌ای

صورت کلی معادلات سه‌جمله‌ای چنین است :

$$(I)\quad ax^p+bx^q+cx^r=0$$

در معادلهٔ (I) وقتی نماینده‌های r و q و p جمله‌های متوالی یک تصاعد حسابی باشند، می‌توان آن را به‌طریق زیر حل کرد:

اگر n را قدر نسبت این تصاعد فرض کنیم چنین خواهیم داشت:

$$(E)\quad p=q+n$$

$$(E')\quad q=r+n$$

از جمع دورابطهٔ (E) و (E') نتیجه می‌شود :

$$(E'')\quad p=r+2n$$

و با توجه به روابط (E') و (E'') معادلهٔ (I) به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$ax^{r+2n}+bx^{r+n}+cx^r=0$$

$$(II)\quad x^r(ax^{2n}+bx^n+c)=0$$

معادلهٔ (II) نیز به دو معادلهٔ زیر تجزیه می‌شود:

$$\begin{cases} (A) & x^r=0 \\ (B) & ax^{2n}+bx^n+c=0 \end{cases}$$

از معادلهٔ (A) نتیجه می‌شود : $x=0$ ؛ یعنی معادلهٔ (A) r ریشهٔ برابر صفر دارد .

برای حل معادلهٔ (B) فرض می‌کنیم :

$$(C)\quad x^n=y$$

پس

$$(D)\quad x^{2n}=y^2$$

و با رعایت روابط (C) و (D) ، معادلهٔ (B) به صورت معادلهٔ حلال زیر درمی‌آید :

$$ay^۲+by+c=۰$$

ریشه‌های معادلهٔ حلال (چنانچه حقیقی باشند) چنین خواهند بود :

$$y'=\frac{-b-\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

$$y''=\frac{-b+\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

برای تعیین جوابهای معادلهٔ (B) کافی است در رابطهٔ (C) به‌جای y مقادیر y' و y'' را قرار داده ومعادله‌های :

$$x^n=y'$$

$$x^n=y''$$

را حل کنیم .

چنانچه y' و y'' اعدادی مثبت باشند ، هریك از معادلات اخیر دارای دوجواب قرینه یا یك جواب مثبت خواهد بود (برحسب آنکه n زوج یا فردباشد) ؛ چنانچه y' و y'' اعدادی منفی باشند ، معادلات اخیر وقتی دارای جوابند که n فرد باشد و در این صورت از هرکدام یك جواب منفی بدست می‌آید :

مثال ۱- معادلهٔ $x^۶-۷۲x^۳+۵۱۲=۰$ را حل کنید .

حل- با فرض $x^۳=y$ ، معادلهٔ حلال را تشکیل می‌دهیم :

$$y^۲-۷۲y+۵۱۲=۰$$

$$y=۳۶\pm\sqrt{۱۲۹۶-۵۱۲}$$

$$y'=۳۶-۲۸=۸$$

$$y''=۳۶+۲۸=۶۴$$

اکنون ریشه‌های معادلهٔ اصلی را تعیین می‌کنیم :

$$x^۳=y'=۸$$

$$\boxed{x_۱=\sqrt[۳]{۸}=۲}$$

$$x^۳=y''=۶۴$$

$$\boxed{x_۲=\sqrt[۳]{۶۴}=۴}$$

ریشه‌های معادلهٔ اصلی اعداد ۲ و ۴ هستند .

مثال ۲- معادلهٔ $۳x^۷-۷x^۴+۴x=۰$ را حل کنید :

حل:

$$x(۳x^۶-۷x^۳+۴)=۰$$

$$x_۱=۰$$

$$۳x^۶-۷x^۳+۴=۰ \qquad (I)$$

با فرض $x^۳=y$ (II) ، معادلهٔ (I) به صورت معادلهٔ **حلال** زیر نوشته می‌شود :

$$۳y^۲-۷y+۴=۰$$

ریشه های معادلهٔ حلال عبارتند از :

$$y' = 1$$

$$y'' = \frac{4}{3}$$

برای تعیین ریشه‌های معادلهٔ اصلی کافی است در معادلهٔ (II) به جای y هر یك از ریشه‌های معادلهٔ حلال را قرار دهیم و از معادلات حاصل ، مقدار x را بدست‌آوریم :

$$x^3 = y' = 1$$

$$\boxed{x_2 = \sqrt[3]{1} = 1}$$

$$x^3 = y'' = \frac{4}{3}$$

$$x_3 = \sqrt[3]{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{\frac{36}{27}} = \frac{\sqrt[3]{36}}{3}$$

یابطور خلاصه : $\boxed{x_3 = \frac{\sqrt[3]{36}}{3}}$

ریشه‌های معادلهٔ مفروض،اعداد ۰ و ۱ و $\frac{\sqrt[3]{36}}{3}$ هستند .

د - معادلهٔ دومجذوری

معادلهٔ درجه چهارمی را که شامل جمله‌های درجهٔ فرد از حرف مجهول نباشد ، **معادلهٔ دومجذوری** می‌نامند .

صورت کلی معادلهٔ دومجذوری چنین‌است :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

برای حل‌معادلات دومجذوری بافرض $x^2 = y$ معادلهٔ حلال :

$$ay^2 + by + c = 0$$

را تشکیل می‌دهند ، سپس هریك از ریشه‌های معادلهٔ حلال را مساوی x^2 قرار می‌دهند وریشه‌های معادلهٔ دومجذوری راپیدا می‌کنند .

تبصره - چنانچه معادلهٔ حلال جواب نداشته باشد ، معادلهٔ دو مجذوری هم جواب نخواهد داشت .

مثال۱ - معادلهٔ $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ را حل‌کنید .

حل: با فرض $x^2 = y$ معادلهٔ حلال به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

ریشه‌های این‌معادله عبارتند از $y' = 4$ و $y'' = 9$ ؛ در نتیجه‌ریشه‌های معادلهٔ دومجذوری چنین خواهد شد :

$$x^2 = y' = 4$$

$$\boxed{x = \pm 2}$$

$$x^2 = y'' = 9$$

$$\boxed{x = \pm 3}$$

ریشه‌های معادلهٔ دومجذوری (به شرط وجود آنها)همیشه دوبدو قرینهٔ یکدیگرند .

مثال ۲ ـ معادلهٔ $x^4-3x^2-4=0$ را حل کنید.

حل : فرض : $x^2=y$

معادلهٔ حلال : $y^2-3y-4=0$

ریشه‌های معادلهٔ حلال : $\begin{cases} y'=-1 \\ y''=4 \end{cases}$

دوجواب ازجوابهای معادلهٔ دو مجذوری موهومی است $\left.x^2=y'=-1\right\}$

$$x^2=y''=4$$

$$\boxed{x=\pm 2}$$

معادلهٔ دومجذوری فقط جوابهای (۲±) را دارد .

مثال۳ ـ معادلهٔ $2x^4+7x^2+3=0$ را حل کنید.

حل : فرض : $x^2=y$

معادلهٔ حلال : $2y^2+7y+3=0$

ریشه‌های معادلهٔ حلال که هردومنفیند $\begin{cases} y'=-3 \\ y''=-\frac{1}{2} \end{cases}$

ریشه‌های معادلهٔ دومجذوری موهومیند .

بحث دروجود وتعداد ریشه‌های معادلهٔ دومجذوری:

چنانچه معادلهٔ حلال جواب نداشته باشد ، چهار ریشهٔ معادلهٔ دومجذوری موهومیند. همچنین وقتی معادلهٔ حلال دارای دوریشهٔمنفی باشد ، یعنی اگر :

$$b^2-4ac>0$$

و $\frac{c}{a}>0$

و $-\frac{b}{a}<0$

باشد . معادلهٔ دومجذوری دارای جواب نیست .

چنانچه معادلهٔ حلال دو ریشهٔ مثبت داشته باشد ، یعنی هرگاه :

$$b^2-4ac>0$$

و $\frac{c}{a}>0$

و $-\frac{b}{a}>0$

باشد ، معادلهٔ دو مجذوری دارای چهار جواب خواهد بود که دوبدو قرینهٔ یکدیگرند .

درصورتی‌که $\frac{c}{a}<0$ باشد ، معادلهٔ دو مجذوری فقط دو جواب قرینه خواهد داشت .

ه ـ معادلهٔ معکوس نوع اول

معادلهٔ معکوس نوع اول معادله‌ای را گویند که حاصل ضرب جفت جفت ریشه‌هایش برابر واحد باشد .

از این تعریف نتیجه می‌شود که اگر α ریشهٔ یك معادلهٔ معکوس نوع اول باشد، $\frac{1}{\alpha}$ نیز ریشهٔ همان معادله خواهد بود ؛ بعلاوه تعداد ریشه‌های معادلهٔ معکوس نوع اول همیشه زوج است ، مگر وقتی که یکی از ریشه‌ها برابر $(+1)$ یا (-1) باشد که در این صورت ریشهٔ معادله وعکس آن باهم متساویند و درنتیجه تعداد ریشه‌ها فرد خواهد بود .

۴ ـ قضیه ـ شرط لازم‌وکافی برای‌آنکه معادله‌ای ازدرجهٔ زوج معکوس نوع اول باشد ، این است که ضرایب جمله‌های متساوی‌البعد از طرفین ، متساوی باشند ؛ چنانچه معادله فاقد جملهٔ وسط باشد ، ضرایب جمله‌های متساوی‌البعد از طرفین می‌توانند قرینهٔ یکدیگر نیز باشند .

اولاً شرط لازم است ـ فرض می‌کنیم معادلهٔ :

$$(I)\qquad ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

معکوس نوع اول باشد ؛ اگر $\alpha\neq 0$ ریشهٔ معادلهٔ (I) فرض شود ، طبق تعریف ، $\frac{1}{\alpha}$ نیز ریشهٔ همان معادله خواهد بود ؛ یعنی چنین خواهیم داشت :

$$a\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4+b\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+c\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+d\left(\frac{1}{\alpha}\right)+e=0$$

یا

$$a+b\alpha+c\alpha^2+d\alpha^3+e\alpha^4=0$$

از رابطهٔ اخیر معلوم می‌شود که α ریشهٔ معادلهٔ :

$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4=0$$

یا

$$(II)\qquad ex^4+dx^3+cx^2+bx+a=0$$

است وچون بنابر فرض ، α ریشهٔ معادلهٔ (I) است، پس معادلات (I) و (II) دارای‌ریشهٔ مشترك می‌باشند ؛ درنتیجه باید ضرایب‌جمل‌متشابه از معادلات (I) و (II) متناسب باشند ، یعنی باید چنین داشته باشیم :

$$\frac{a}{e}=\frac{b}{d}=\frac{c}{c}=\frac{d}{b}=\frac{e}{a}$$

حال اگر $c\neq 0$ باشد ، از نسبت $\frac{c}{c}=1$ معلوم می‌شود :

$$a=e$$

و

$$b=d$$

و معادلهٔ (I) به صورت زیر نوشته خواهد شد :

$$(III)\qquad ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$$

چنانچه $c=0$ یعنی معادلهٔ (I) فاقد جملهٔ وسط باشد ،تناسبهای بالا چنین می‌شود :

$$\frac{a}{e}=\frac{b}{d}=\frac{d}{b}=\frac{e}{a}$$

از برابری دو نسبت اول و آخر و همچنین از برابری دو نسبت وسط نتیجه می‌شود :

$$a^2=e^2$$

و $b^2=d^2$

و از آنجا $a=\pm e$

و $b=\pm d$

در نتیجه معادلهٔ (I) به یکی ازدوصورت زیر درمی‌آید :

$$\text{(IV)}\qquad ax^4+bx^3+bx+a=0$$

$$\text{(V)}\qquad ax^4+bx^3-bx-a=0$$

ثانیاً شرط کافی است ـ اکنون باید ثابت کنیم که هر یك از معادلات (III) و (IV) و (V) معادلهٔ معکوس نوع اول است.

یکی از این معادلات مثلاً معادلهٔ (V) را درنظر می‌گیریم، اگر $\alpha\neq 0$ ریشهٔ این معادله باشد، چنین خواهیم داشت :

$$a\alpha^4+b\alpha^3-b\alpha-a=0$$

چون طرفین رابطهٔ اخیر را بر $(-\alpha^4)$ تقسیم کنیم، چنین خواهیم داشت.

$$-a-b\left(\frac{1}{\alpha}\right)+b\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+a\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4=0$$

یا : $a\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4+b\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3-b\left(\frac{1}{\alpha}\right)-a=0$

ازتساوی اخیر معلوم می‌شود عدد $\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ نیز ریشهٔ معادلهٔ (V) می‌باشد.

۳ ـ قضیه ـ شرط لازم و کافی برای آنکه معادله‌ای ازدرجهٔ فرد معکوس نوع اول باشد، این است که ضرایب جمله‌های متساوی‌البعد ازطرفین متساوی یا قرینهٔ یکدیگرباشند.

بااستدلالی نظیر قضیهٔ قبل، حکم ثابت می‌شود ونتیجه می‌گیریم که معادلات معکوس نوع اول و از درجهٔ فرد، مثلاً از درجهٔ پنجم، به یکی از دوصورت زیر نوشته می‌شود :

$$\text{(VI)}\qquad ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$$

$$\text{(VII)}\qquad ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx-a=0$$

معادلهٔ معکوس (VI) دارای ریشهٔ (۱ −) و معادلهٔ معکوس (VII) دارای ریشهٔ (۱+) است.

تبصره ـ معادلات معکوس از درجهٔ پنجم به بالا، عموماً به معادلات درجهٔ دوم تبدیل‌پذیر نیستند.

۴ـ حل معادلات معکوس نوع اول ـ بطوری که گفته شد، معادلات معکوس نوع اول وازدرجهٔ فرد، یك جواب (۱+) یا (۱−) دارند، پس بر (x − ۱) یا (x+۱) قابل‌قسمت‌اند. بعد ازتقسیم‌معادلهٔ اصلی بر (x − ۱) یا (x+۱)، معادلهٔ حاصل از درجهٔ زوج خواهد بود. چنانچه درجهٔ این معادله و بطور کلی معادلات معکوس‌نوع اول و از درجهٔ زوج را $2m$ فرض کنیم، برای حل چنین معادلات، ابتدا طرفین معادله را بر x^m تقسیم می‌کنیم وبا فرض :

$$x+\frac{1}{x}=y$$

معادلهٔ حلال را ترتیب می‌دهیم؛ این معادله از درجهٔ m خواهد

بود . چنانچه معادلهٔ حلال قابل حل باشد ، معادلات معکوس نوع اول را می‌توان حل‌کرد .

مثال ۱- معادلهٔ‌معکوس $ax^3+bx^2+bx+a=0$ راحل‌کنید.

این معادله بر $(x+1)$ قابل قسمت است . پس از تقسیم معادله بر $(x+1)$ چنین خواهیم داشت .

$$(x+1)[ax^2+(b-a)x+a]=0$$

ازحل این معادله جوابهای معادلهٔ معکوس بدست می‌آید .

تذکر - به جای تقسیم بر $(x+1)$ ، می‌توان از طریق فاکتورگیری هم به همین نتیجه رسید .

$$ax^3+bx^2+bx+a=0$$
$$a(x^3+1)+bx(x+1)=0$$
$$a(x+1)(x^2-x+1)+bx(x+1)=0$$
$$(x+1)[ax^2+(b-a)x+a]=0$$

مثال ۲- معادلهٔ معکوس $ax^3+bx^2-bx-a=0$ را حل کنید .

این معادله بر $(x-1)$ قابل قسمت است ؛ پس از تقسیم معادله بر $(x-1)$ چنین خواهیم داشت :

$$(x-1)[ax^2+(a+b)x+a]=0$$

از حل این معادله ، جوابهای معادلهٔ معکوس بدست می‌آید .

مثال ۳ - معادلهٔ معکوس $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$

راحل کنید . طرفین معادله رابر x^m یعنی x^2 تقسیم می‌کنیم :

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0$$

ازضرایب جمله‌های متساوی‌البعد ازطرفین فاکتور می‌گیریم :

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

با فرض $x+\frac{1}{x}=y$ ، چنین خواهیم داشت :

$$a(y^2-2)+by+c=0$$
$$ay^2+by+c-2a=0$$

چنانچه y' و y'' ریشه‌هاي معادلهٔ اخیر (معادلهٔ حلال) فرض شوند ، ریشه‌های معادلهٔ معکوس ازحل معادلات :

$$x+\frac{1}{x}=y'$$

و

$$x+\frac{1}{x}=y''$$

بدست می‌آیند . این معادلات وقتی جواب دارند که مبین‌هر یك‌مثبت یا اقلا صفر باشد . یعنی‌داشته باشیم .

$$x^2-y'x+1=0 \qquad x^2-y''x+1=0$$
$$\Delta=y'^2-4\geq 0 \qquad \Delta=y''^2-4\geq 0$$

یعنی بطورکلی‌ریشه‌های معادلهٔ‌حلال به‌صورت $y\geq 2$ یا $y\leq -2$ باشند ؛ به عبارت دیگر ، ریشه‌های معادلهٔ حلال بین (۲+ و ۲-)

واقع نباشند .

مثال۴ ـ معادلهٔ معکوس $ax^4+bx^3+bx+a=0$ عیناً مانند مثال (۳) حل می‌شود .

مثال۵ ـ معادلهٔ $ax^4+bx^3-bx-a=0$ را حل‌کنید .

ریشه‌های معادلهٔ فوق (۱±) هستند . پس معادله بر :

$$(x-1)(x+1) \quad \text{یا} \quad (x^2-1)$$

قابل قسمت است ؛ بعد از تقسیم معادله بر (x^2-1) چنین خواهیم داشت :

$$ax^4+bx^3-bx-a=(x^2-1)(ax^2+bx+a)=0$$

که ازحل این معادله ، ریشه‌های معادلهٔ معکوس بدست می‌آید .

تذکر ـ از راه تجزیه هم می‌توان به‌همین نتیجه رسید :

$$a(x^4-1)+bx(x^2-1)=a(x^2-1)(x^2+1)+bx(x^2-1)$$

$$=(x^2-1)(ax^2+bx+a)=0$$

مثال عددی ـ مطلوب است حل معادلهٔ :

$$12x^5-8x^4-45x^3+45x^2+8x-12=0$$

معادله بر $(x-1)$ قابل قسمت است . پس از تقسیم معادله بر $(x-1)$ نتیجه می‌شود :

$$(x-1)(12x^4+4x^3-41x^2+4x+12)=0$$

یك جواب معادله $x=1$ است .اکنون معادلهٔ :

$$12x^4+4x^3-41x^2+4x+12=0$$

را حل می‌کنیم . ابتدا طرفین تساوی را بر x^2 تقسیم می‌کنیم :

$$12x^2+4x-41+\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}=0$$

ازضرایب جمله‌های متساوی‌البعد ازطرفین فاکتور می‌گیریم :

$$12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-41=0$$

با فرض $x+\frac{1}{x}=y$ و نتیجه‌ای‌که از این فرض به صورت زیر حاصل می‌شود :

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

معادلهٔ حلال را تشکیل می‌دهیم و آن را حل می‌کنیم :

$$12(y^2-2)+4y-41=0$$

$$12y^2+4y-65=0$$

$$y'=-\frac{5}{2}$$

$$y''=\frac{13}{6}$$

ازحل معادلات :

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{13}{6}$$

جوابهای دیگر معادله بدست می‌آید :

$$x+\frac{1}{x}=\frac{13}{6}$$

$$6x^2-13x+6=0$$

$$\boxed{x'=\frac{2}{3} \qquad x''=\frac{3}{2}}$$

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$$

$$2x^2+5x+2=0$$

$$\boxed{x'=-2 \qquad x''=-\frac{1}{2}}$$

پس معادلهٔ مفروض دارای پنج جواب به شرح زیراست :

$x_1=1$ و $x_2=\frac{2}{3}$ و $x_3=\frac{3}{2}$ و $x_4=-2$ و $x_5=-\frac{1}{2}$

و ـ معادلهٔ معکوس نوع دوم :

۵ ـ معادلهٔ معکوس نوع دوم معادله‌ای راگویندکه حاصلضرب جفت جفت ریشه‌هایش برابر (۱−) باشد ؛ طبق این تعریف ، اگر $\alpha\neq0$ ریشهٔ یك معادلهٔ معکوس‌نوع دوم باشد ، عدد $(-\frac{1}{\alpha})$ نیز ریشهٔ همان معادله خواهد بود . چنانچه $\alpha=1$ فرض شود ، معادله ریشهٔ (۱−) هم خواهد داشت. پس :

معادلهٔ معکوس نوع دوم همیشه از درجهٔ زوج و عدهٔ ریشه‌هایش نیز زوج است .

۶ ـ قضیه ـ شرط لازم وکافی برای آنکه‌معادله‌ای ازدرجهٔ زوج ، معکوس نوع دوم باشد ، این است‌که ضرایب جمله‌های متساوی‌البعد ازطرفین متناوباً متساوی وقرینهٔ یکدیگر باشند .

با استدلالی نظیر آنچه که در قضیهٔ (شمارهٔ ۲) گفته شد ، این قضیه ثابت می‌شود ونتیجه می‌گیریم که معادلهٔ معکوس نوع دوم ، مثلاً از درجهٔ چهارم، به‌یکی ازصورتهای زیر است .

$$ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0$$

$$ax^4+bx^3-bx+a=0$$

$$ax^4+bx^3+bx-a=0$$

۷ ـ حل معادلات معکوس نوع دوم :

طریقهٔ حل معادلات معکوس‌نوع دوم کاملا مشابه راه‌حلی‌است که برای معادلات معکوس نوع اول‌گفته‌شدبا این تفاوت که‌در این‌نوع معادلات باید بافرض زیرمعادلهٔ حلال راتشکیل داد :

$$x-\frac{1}{x}=y$$

مثال۱ـمعادلهٔ $ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0$ راحل‌کنید.

پس از تقسیم طرفین تساوی بر x^2 و فاکتورگیریهای لازم چنین خواهیم داشت :

$$ax^2+bx+c-\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0$$

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x-\frac{1}{x}\right)+c=0$$

بافرض : $x-\frac{1}{x}=y$ نتیجه می‌گیریم :

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=y^2$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$$

ومعادلهٔ حلال چنین خواهد شد :

$$a(y^2+2)+by+c=0$$

یا

$$ay^2+by+c+2a=0$$

پس از تعیین y می‌توان معادلات :

$$x-\frac{1}{x}=y'$$

و

$$x-\frac{1}{x}=y''$$

را حل کرد و جوابهای معادلهٔ معکوس را (چنانچه حقیقی باشند) بدست آورد .

مثال۲ ـ معادلهٔ $ax^4+bx^3+bx-a=0$ راحل کنید .

در جمله‌های متساوی‌البعد از طرفین از عوامل مشترك فاکتور می‌گیریم :

$$a(x^4-1)+bx(x^2+1)=0$$

$$a(x^2+1)(x^2-1)+bx(x^2+1)=0$$

$$(x^2+1)(ax^2+bx-a)=0$$

معادلهٔ : $x^2+1=0$ ریشه‌های موهومی دارد ؛ ازحل معادلهٔ :

$$ax^2+bx-a=0$$

جوابهای معادلهٔ معکوس را می‌توان بدست آورد .

مثال۳ ـ معادلهٔ $ax^4+bx^3-bx+a=0$ راحل کنید .

پس از تقسیم طرفین معادله بر x^2 و فاکتورگیری لازم چنین خواهیم داشت :

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x-\frac{1}{x}\right)=0$$

$$x-\frac{1}{x}=y$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$$

$$a(y^2+2)+by=0$$

$$ay^2+by+2a=0$$

پس از حل معادلهٔ حلال و تعیین جوابهای آن ، می‌توان ریشه‌های معادلهٔ معکوس‌رابدست آورد .

تمرین

معادلات زیر را حل کنید :

۱ـ $x^4-10x^2+9=0$ ۲ـ $x^4-5x^2+4=0$

۳ـ $x^4-13x^2+36=0$ ۴ـ $x^4-26x^2+25=0$

-۵ $4x^4-37x^2+9=0$ -۶ $4x^4+17x^2+4=0$

-۷ $5x^4-12x^2+4=0$ -۸ $3x^4-26x^2-9=0$

-۹ $5x^4+8x^2-1=0$ -۱۰ $6x^4-x^2-7=0$

-۱۱ $x^4-3x^2+1=0$ -۱۲ $x^4-6x^2+8=0$

معادلات حرفی زیر راحل کنید :

-۱۳ $a^2b^2x^4-(a^4+b^4)x^2+a^2b^2=0$

-۱۴ $x^4+4abx^2-(a^2-b^2)^2=0$

-۱۵ $c^4x^4+c^2(a^2-b^2)x^2-a^2b^2=0$

-۱۶ معادلهٔ $\frac{x^2}{x^2-a^2}+\frac{x^2}{x^2-b^2}=4$ را حل کنید .

-۱۷ تایك هزارم تقریب ریشه‌های معادلهٔ $x^4+\pi x^2-7.6=0$ را بدست آورید .

-۱۸ m رابطریقی تعیین کنیدکه(۲ −) یکی ازریشه‌های معادلهٔ زیر باشد. پس‌ازتعیین m جوابهای معادلهٔ حاصل رابدست آورید :

$$2x^5+(m+1)x^4+(1+8m)x^3-(7+m)x^2-(6m-1)x+6=0$$

معادلات زیر را حل کنید :

-۱۹ $(x^4+x^2+1)^2-38(x^4+x^2+1)+105=0$

-۲۰ $(x+\sqrt{x})^4-(x+\sqrt{x})^2=159600$

-۲۱ $\frac{(1+x)^2}{1+x^3}+\frac{(1-x)^2}{1-x^3}=2$

-۲۲ $x^2-6x+9=4\sqrt{x^2-6x+9}$

-۲۳ $2x^2+3x-3+\sqrt{2x^2+9+3x}=30$

-۲۴ $(x^2-x+1)^4-10x^2(x^2-x+1)^2+9x^4=0$

معادلات زیررا حل کنید:

-۲۵ $x^4-16=0$ -۲۶ $x^3\pm 27=0$

-۲۷ $x^5=32$ -۲۸ $x^4\pm 625=0$

-۲۹ $x^6-19x^3-216=0$ -۳۰ $x^6-28x^3+27=0$

-۳۱ $x^8-97x^4+1296=0$ -۳۲ $8x^6+65x^3+8=0$

-۳۳ $7x^3-\frac{1890}{x^3}-119=0$

معادلات معکوس زیر راحل کنید :

-۳۴ $3x^3-13x^2+13x-3=0$

-۳۵ $2x^3+7x^2+7x+2=0$

-۳۶ $x^4-x^3+x-1=0$

-۳۷ $5x^3-31x^2+31x-5=0$

-۳۸ $2x^4+5x^3-5x-2=0$

-۳۹ $5x^4-26x^3+26x-5=0$

-۴۰ $x^4-6x^3+6x-1=0$

-۴۱ $3x^4-4x^3+4x-3=0$

-۴۲ $x^4-5x^3+5x-1=0$

-۴۳ $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$

-۴۴ $x^4-x^3+\frac{5}{4}x^2-x+1=0$

-۴۵ $x^4-10x^3+5x^2-10x+4=0$

-۴۶ $3x^4-5x^3-14x^2+5x+3=0$

-۴۷ $4x^4-17x^3+17x+4=0$

-۴۸ $\frac{1+x^4}{(1+x)^4}=\frac{1}{2}$

-۴۹ $x^5-4x^4+3x^3+3x^2-4x+1=0$

-۵۰ $2x^5-3x^4-5x^3+5x^2+3x-2=0$

-۵۱ $12x^5-8x^4-45x^3+45x^2+8x-12=0$

-۵۲ $3x^5-16x^4+17x^3+17x^2-16x+3=0$

-۵۳ معادلهٔ : $ax^4+bx^3+cx^2+bkx+ak^2=0$ مفروض است . تحقیق کنیدکه با مجهول معاونی نظیر $y=x+\frac{k}{x}$ این معادله به معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل‌پذیر است . سپس با استفاده از تمرین فوق معادلات زیر را حل کنید :

-۵۴ $3x^4-5x^3-14x^2+5x+3=0$

-۵۵ $x^4-5x^3+10x^2-10x+4=0$

-۵۶ $x^4-2x^3+x-625=0$

معادلات زیررا حل کنید :

-۵۷ $\sqrt{2x+13}-3=0$

-۵۸ $\sqrt{3x-2}=5$

-۵۹ $\sqrt{x^2+9}-1=x$

-۶۰ $\sqrt{2x+7}-\sqrt{2x-1}=2$

-۶۱ $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+6}=3$

-۶۲ $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}=6$

-۶۳ $\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-1}-1$

-۶۴ $\sqrt{3x+4}-\sqrt{x}=6$

-۶۵ $\sqrt{3x+8}-\sqrt{3(1-2x)}=2$

-۶۶ $\sqrt{3x+7}+\sqrt{x-2}=\sqrt{3x}$

-۶۷ $2\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+1}$

-۶۸ $\sqrt{6+x}-\sqrt{2-x}=\sqrt{2+x}$

-۶۹ $\sqrt{4x+5}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{x+3}$

-۷۰ $\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{5-8x^2}=\sqrt{4x^2+7}$

حل مسائل عددی درجهٔ دوم

چنانکه درفصل ششم دیدیم، می‌توان مسائل فکری را از طریق جبر حل‌کرد . چنانچه حل این مسائل منجر به حل معادلات درجهٔ دوم شود، آنهارا مسائل درجهٔ دوم گویند.دراین حالت نیز بایدمجهول مسئله را بطورمناسب‌انتخاب کرد ومعادلهٔ مسئله رانوشت وباحل‌معادلهٔ نوشته شده، جوابها را بدست آورد وبالاخره به بحث و تحقیق در بارهٔ قابل قبول بودن جوابها پرداخت .

مثال۱ - می‌خواهند ۱۰۵۰ ریال را بین چند نفر بتساوی تقسیم کنند . در موقع تقسیم ۵ نفر حاضر نمی شوند، درنتیجه به سهم

سایرین ۷ ریال اضافه می‌شود . معین کنید تعداد نفرات اولیه و سهم هریك را .

حل ـ اگر تعداد نفرات اولیه را x نفر فرض‌کنیم ، سهم هریك $\frac{۱۰۵۰}{x}$ ریال می‌شود ، وچون در موقع تقسیم ۵ نفر حضور ندارند و ۱۰۵۰ ریال بین $(x-۵)$ نفر تقسیم می‌شود ، سهم نفرات این عده $\frac{۱۰۵۰}{x-۵}$ ریال خواهد شد. بنا به فرض مسئله ، تفاوت این دوسهم ۷ریال است، یعنی :

$$\frac{۱۰۵۰}{x-۵}-\frac{۱۰۵۰}{x}=۷$$

اکنون این‌معادله راحل می‌کنیم:

$$۱۰۵۰x-۱۰۵۰(x-۵)=۷x(x-۵)$$

پس از اختصار چنین خواهیم داشت :

$$x^{۲}-۵x-۷۵۰=۰$$

جوابهای این‌معادله عبارتند از :

$$x'=-۲۵ \quad \text{و} \quad x''=+۳۰$$

واضح است که چون تعداد نفرات نمی‌توانند منفی باشد ، تنها جواب قابل قبول مسئله عبارت است از :

$$\boxed{x=۳۰ \quad \text{نفر}}$$

درنتیجه هر نفر دردفعهٔ اول :

$$\frac{۱۰۵۰}{x}=\frac{۱۰۵۰}{۳۰}=۳۵ \text{ ریال}$$

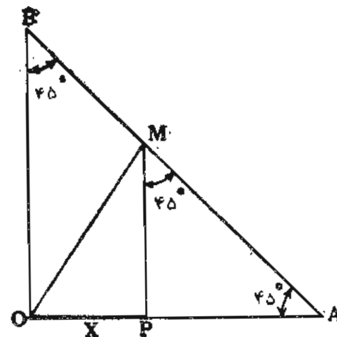
ودردفعهٔ دوم :

$$\frac{۱۰۵۰}{x-۵}=\frac{۱۰۵۰}{۳۰-۵}=\frac{۱۰۵۰}{۲۵}=۴۲ \text{ ریال}$$

بوده است .

مثال ۲ ـ در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین OAB $(\hat{O}=۹۰^\circ)$ طول هریك از دو ساق OA و OB برابر ۴ است . روی وتر AB از این مثلث نقطه‌ای مانند M طوری تعیین کنید که $\overline{MA}^{۲}+\overline{OM}^{۲}=۲۸$ باشد .

حل ـ نقطهٔ M را جواب مسئله وطول OP را x فرض‌می‌کنیم.
(P پای عمودی است که از M بر ساق OA فرود آمده است)؛



درنتیجه :

$$PA=۴-x$$

و

$$PM=PA$$

(زیرا مثلث قائم‌الزاویهٔ APM نیزمتساوی‌الساقین است) .

ودردومثلث‌قائم‌الزاویهٔ APM و OPM روابطزیر برقراراست:

$$\overline{MA}^{۲}=\overline{PA}^{۲}+\overline{PM}^{۲}=۲\overline{PA}^{۲}=۲(۴-x)^{۲}$$

$$\overline{OM}^{۲}=\overline{OP}^{۲}+\overline{PM}^{۲}=x^{۲}+(۴-x)^{۲}$$

دورابطهٔ اخیر را عضو بعضو با هم جمع می‌کنیم :

$$\text{(I)} \qquad \overline{MA}^{۲}+\overline{OM}^{۲}=۳(۴-x)^{۲}+x^{۲}$$

اما بنابرفرض :

$$(II) \qquad \overline{MA}^{۲}+\overline{OM}^{۲}=۲۸$$

ازمقایسهٔ روابط (I) و (II) چنین نتیجه می‌شود :

$$۳(۴-x)^{۲}+x^{۲}=۲۸$$

و پس از اختصار:

$$(III) \qquad x^{۲}-۶x+۵=۰$$

جوابهای معادلهٔ (III) عبارتند از:

$$x'=۱ \quad و \quad x''=۵$$

این دو جواب از نظر کلی هر دو قابل قبولند اما چون نقطهٔ M باید روی وتر AB ودرنتیجه نقطهٔ P روی ضلع OA واقع باشد فقط جواب $x=۱$ جواب مسئله است .

تعبیرهندسی - درهندسه ثابت می‌کنندکه مکان‌هندسی نقاطی از صفحه که مجموع مربعات فواصل آنها از دونقطهٔ ثابت O و A مقدار ثابت $K^{۲}$ باشد محیط دایره‌ای است به‌مرکز C، وسط OA ، وبه‌شعاع

$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲K^{۲}-\overline{OA}^{۲}}$$

و بخصوص دراین مسئله‌که $OA=۴$ و $K^{۲}=۲۸$ است مقدار R چنین می‌شود : $R=\sqrt{۱۰}$.

چنانچه به مرکزC و با شعاع $\sqrt{۱۰}$ دایره‌ای رسم کنیم ، محل تقاطع دایره با وتر AB جواب مسئله است .

تمرین

۱- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای طول وتر ۱۰ متر و تفاضل اضلاع زاویهٔ قائمه ۲ متر است . اضلاع مثلث راپیدا کنید .

۲- مطلوب است طول اضلاع مثلث‌قائم‌الزاویه‌ای که مجموع طول‌وتر با هر یك از اضلاع آن ۱۲ متر و ۸ متر باشد .

۳- مجموع دوعدد صحیح ۲۶ است . هرگاه مربع اولی را از مربع دوبرابر دومی کم‌کنیم تفاضل ۳۸۰ می‌شود. آن‌دوعدد راپیداکنید .

۴- شخصی مقداری پارچه خرید به مبلغ ۵۴۰۰ ریال ، پیش خود حساب کرد که هرگاه در هر متر ۱۵ ریال‌تخفیف می‌گرفت ۱/۵ مترپارچه بیشتر داشت. معین کنید طول پارچه وقیمت یك‌متر آن‌را .

۵- مبلغ ۴۰۰۰ ریال رابین چندنفر می‌خواهیم تقسیم کنیم. درموقع تقسیم سه‌نفر شرکت نمی‌کنند. درنتیجه به سهم هر یك از سایرین ۳۰۰ ریال اضافه می‌شود. تعیین‌کنید تعداد نفرات اولیه وسهم هریك را .

۶- چهار عدد صحیح متوالی چنان‌تعیین کنیدکه مجموع مربعات‌آنها ۹۶۶ شود .

۷- مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۵۰ مترمربع و طول وتر آن ۱۵ متر است. اضلاع مثلث راتا یك دهم تقریب حساب‌کنید .

۸- محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۱۳۲ متر و مجموع مربعات اضلاع مثلث ۶۰۵۰ می‌باشد . اضلاع مثلث چقدر است ؟

۹- عددی دورقمی چنان پیدا کنید که مجموع مربعات ارقام آن مساوی با همان عدد به اضافهٔ حاصل ضرب ارقامش باشد و چنانچه ترتیب نوشتن ارقام آن عدد را تغییر دهیم ، عدد حاصل ۳۶ واحد از همان عدد بزرگتر شود .

۱۰- مجموع دوعدد ۲۴ ومجموع مربعات آنها از حاصل ضرب آن دوعدد ۴۴۴ واحد بیشتر است. آن دوعدد کدامند ؟

۱۱- عددی است‌سه‌رقمی بین ۵۰۰ و ۶۰۰ ، بطوری که مجموع‌ارقام آن ۹ است . چنانچه آن عدد را به ترتیب عکس بنویسیم ، عدد حاصل $\frac{35}{57}$ عدد اولی شود .

۱۲- مجموع ۵ جملهٔ متوالی‌یك‌تصاعدهندسی۲۴۲ ومجموع جمله‌های اول‌و سوم وپنجم آن۱۸۲ است. این‌تصاعد رامشخص کنید .

۱۳- چند نفر ۱۰۸۰۰ ریال بدهکاری دارند که باید بطور متساوی بپردازند . اگر دونفر از آنهاقادر به‌پرداخت سهم خود نباشند ، به‌سهم هریك از دیگران ۹۰۰ ریال‌اضافه می‌شود . عدهٔ آنهارا تعیین کنید .

۱۴- چند کارگر باید کاری به حجم ۴۳۲ مترمکعب را انجام‌دهند. اگر ۴ نفر از آنها حاضر به‌کارنشوند، بقیه باید هریك ۹ متر مکعب بیشتر کار انجام دهند. عدهٔ آنهارا تعیین کنید .

۱۵- حوضی دارای دوشیر A و B است. مدت پرشدن حوض بوسیلهٔ شیر A ، ۲۲ دقیقه بیشتر ازمدت پرشدن آن به‌وسیلهٔ شیر B است. اگرهردو شیر A و B باهم باز باشند، حوض درمدت یك‌ساعت پر می‌شود . معین کنید که‌هر یك‌از شیرها حوض رابتنهایی درچه مدت پرمی‌کند .

۱۶- شخصی چندمتر پارچه به‌مبلغ ۶۰۰ ریال خرید . اگر با همین مبلغ ۳متر بیشتر پارچه خریده بودهرمتر پارچه ۱۰ ریال ارزانتر محسوب می‌شد. معین کنید چند متر پارچه خریده است .

۱۷- تناسبی تعیین کنیدکه جملهٔ اولش ۶ واحد ازجملهٔ دوم بیشترو جملهٔ سومش ۵ واحدازجملهٔ چهارم زیادترباشد،درصورتی که مجموع‌مربعات چهار جمله‌اش ۷۹۳ است .

۱۸- عددی سه‌رقمی تعیین کنیدکه مجموع ارقامش ۱۵ وحاصل‌ضرب ارقام طرفین آن‌نیز ۱۵ باشد وعددی که‌به عکس ترتیب باهمان ارقام‌نوشته شود ۱۹۸ واحد ازعدد مطلوب بیشتر است .

۱۹- شخصی یك باغ ویك مزرعه راکه مساحت آنها جمعاً یك هکتار و ۵۶ آر است‌خریداری‌کرد. قیمت باغ ۱۹۲۰۰ ریال‌ومزرعه ۱۴۰۰۰ریال است قیمت یك‌متر مربع باغ ۱۱ ریال‌بیش ازقیمت یك‌متر مربع مزرعه‌ارزش دارد. قیمت یك‌متر مربع هریك‌را تعیین کنید .

۲۰- مجموع دو سرمایه ۱۰۰۰۰ ریال‌است. هریك ازآنها رابانرخی برابر $\frac{1}{1000}$ خود به مرابحه داده‌اند. اگرمجموع سودسالانهٔ آنها۵۰۵ ریال باشد، سرمایه‌ها را تعیین‌کنید .

۲۱- فاصلهٔ دوشهر ۵۸۸ کیلو متراست. ترنی باسرعت معینی ،فاصلهٔ دوشهررا‌طی می‌کند، اگر سرعت آن ۱۰/۵ کیلومتر افزایش یابد ، فاصلهٔ مذکور را یك‌ساعت زودتر طی‌می‌کند سرعت ترن‌را حساب کنید .

۲۲- دوشهر به‌فاصلهٔ ۳۶۰کیلومتر واقعند. دواتوموبیل دریك‌لحظه‌از یك‌شهر به‌طرف شهردیگر حرکت می‌کنند. سرعت اولی ۱۵کیلومتر بیشتراز دومی است ودر نتیجه دوساعت زودتر ازاولی به‌مقصد می‌رسد ، سرعت هریك را معلوم کنید .

۲۳- a و b و c اضلاع مثلث ABC بترتیب عبارتند از $a=11$ و $b=8$ و $c=5$. مطلوب است تعیین x (مثبت یامنفی) بقسمی که مثلثی به اضلاع $a+x$ و $b+x$ و $c+x$ قائم‌الزاویه شود .

۲۴- مثلث ABC قائمه‌درA مفروض است. اگر $AB+BC=24$ و $AC+BC=27$ باشد، اضلاع مثلث‌را حساب‌کنید .

۲۵- اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای تشکیل یك تصاعد هندسی می‌دهند . اگر وتر آن ۸ باشد، دوضلع دیگر را حساب کنید، وتحقیق کنید که‌ارتفاع وارد‌بر وتر نیزیك جمله ازتصاعد مذکور است .

۲۶- مثلث‌متساوی‌الاضلاعOAB به ضلع ۶ مفروض است . خطی به موازات AB اضلاع OA و OB یا امتداد آنها رادر C وD قطع می‌کند بقسمی که: $AC^2+CD^2+BD^2=60$. CD رابه چه‌فاصله ازAB باید رسم‌کرد .

۲۷- نیمدایره‌ای به‌قطر $AA'=۱۶$ وبه مرکز O مفروض است ؛ مماس برنیمدایره دریك نقطه مانند M ، مماس نقطهٔ A را در B و شعاع عمود بر AA' را در C قطع می‌کند ؛ مطلوب است محاسبهٔ $AB=x$ بقسمی‌که محیط ذوزنقهٔ $OABC$ برابر ۷۴ شود .

۲۸ - روی‌اضلاع AB و BC و CA از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC دریك جهت ، طولهای $AA'=BB'=CC'=x$ را جدامی‌کنیم؛ به فرض اینکه ضلع مثلث ABC برابر ۸ باشد ، مطلوب است تعیین x بقسمی‌که :

$$\frac{\text{مساحت } A'B'C'}{\text{مساحت } ABC}=\frac{۱۹}{۶۴}$$ شود .

۲۹ - اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای را حساب‌کنیدکه محیطش ۸۴ متر و مساحتش ۲۹۴ مترمربع است .

۳۰ - اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای را حساب‌کنیدکه محیطش ۶ متر و ارتفاعش $h=۱/۲$ متر باشد .

۳۱ - اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای را حساب‌کنید که‌مجموع اضلاع آن، $\frac{۲۴}{۵}$ ومجموع مکعبات اضلاعش ۱۳/۸۲۴ باشد .

۳۲ - مطلوب است محاسبهٔ اضلاع مثلث ABC که ارتفاع و میانه و نیمساز راس A از آن ، بترتیب برابر ۳ و ۵ و ۳/۲۵ باشند .

رادیکالهای مرکب[۱]

مسئلهٔ ۱ - اعدادمنطق a و b و a' و b' وعدداصم $\sqrt{b}$ مفروضند؛

اولا - از تساوی : $\quad a+\sqrt{b}=a'+\sqrt{b'} \quad$ (۱)

برابریهای : $a=a'$ و $b=b'$ را نتیجه بگیرید ؛

ثانیاً - ثابت‌کنید تساوی : $\quad a+\sqrt{b}=a'-\sqrt{b'} \quad$ (۲)

هیچوقت برقرار نیست .

حل :

اولا - واضح است‌که اگر $a=a'$ باشد ، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود: $\sqrt{b}=\sqrt{b'}$ یا $b=b'$.

حال‌فرض می‌کنیم $a\neq a'$ باشد؛چون a' را به طرف دیگر تساوی (۱) نقل‌کنیم ، چنین خواهیم داشت :

$$a-a'+\sqrt{b}=\sqrt{b'} \qquad (۳)$$

طرفین تساوی (۳) را مجذورمی‌کنیم تا حاصل شود:

$$a^۲+a'^۲+b-۲aa'+۲(a-a')\sqrt{b}=b'$$

یا $$۲(a'-a)\sqrt{b}=a^۲+a'^۲-۲aa'+b-b' \qquad (۴)$$

طرف راست تساوی (۴)عددی است منطق ؛ درنتیجه، $\sqrt{b}$ هم باید منطق باشد واین خلاف فرض است؛ پس $a=a'$ ودر نتیجه $b=b'$.

۱- این موضوع، دربرنامهٔ‌تحصیلی دبیرستان بطورصریح قیدنشده‌است؛ ولی چون عملاً مورد احتیاج است ، به ذکرآن در اینجا می‌پردازیم .

ثانیاً ـ تساوی (۲) هیچوقت برقرار نیست؛ زیرا پس از اثبات تساوی a و a′، از تساوی (۲) نتیجه می‌گیریم: $\sqrt{b} = -\sqrt{b'}$ واین ممکن نیست.

رادیکال مرکب ـ صورت کلی رادیکالهای مرکب چنین است:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$$

که درآن، B مجذور کامل نیست.

تبدیل رادیکال مرکب به رادیکالهای ساده.

مسئلهٔ ۴ ـ دوعدد مثبت ومنطق مانند x و y بطریقی تعیین کنیدکه داشته باشیم:

$$(۱) \qquad \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

حل ـ اگر رابطهٔ (۱) صحیح باشد، بایدتوان m ام طرفین این رابطه نیزمتساوی باشند (فصل دوم ـ شمارهٔ ۲)؛ طرفین رابطهٔ(۱) رامجذور می‌کنیم:

$$(۲) \qquad A \pm \sqrt{B} = x + y \pm 2\sqrt{xy}$$

و از تساوی (۲) باتوجه به مسئلهٔ (۱)، نتیجه می‌شود:

$$(۳) \qquad x + y = A$$

و

$$(۴) \qquad 2\sqrt{xy} = \sqrt{B}$$

یا

$$(۵) \qquad x + y = A$$

$$(۶) \qquad xy = \frac{B}{4}$$

یعنی مجموع وحاصلضرب دوعددمطلوب، بترتیب در روابط(۵) و (۶) صدق می‌کنند و بنابراین، x و y باید ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم: $Z^2 - AZ + \frac{B}{4} = 0$ باشندکه‌چون آن‌راحل‌کنیم، چنین‌خواهیم‌داشت:

$$Z = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

پس:

$$(۷) \qquad x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

و

$$(۸) \qquad y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

شرط آنکه این مقادیر x و y مناسب با مسئله باشند، این است که این دومقدار، اولاً مثبت ومنطق باشند وثانیاً به دوطرف روابط(۳) و(۴) که مجذورشده است، یك علامت بدهند.

الف ـ اعداد x و y:
- مثبت خواهندبود اگر $A^2 - B > 0$ و $A > 0$ باشد.
- منطق خواهندبود اگر $(A^2 - B)$ مجذور کامل باشد.

بنابراین، x و y مثبت ومنطق خواهندبود اگر A مثبت و$(A^2 - B)$ مجذور کامل باشد.

ب ـ بافرض تحقق دوشرط بالا، دوطرف هریك ازسه رابطهٔ(۳) و (۴) و(۱) یك علامت خواهندداشت، زیراهمگی آنها مثبت خواهندبود.

بطور خلاصه، از بحث بالا چنین نتیجه می‌شودکه اگر A مثبت و $(A^2 - B)$ مجذور کامل باشد، مسئله یك جواب خواهد داشت و با فرض برقراری دوشرط اخیر، اگرفرض کنیم $A^2 - B = C^2$ باشد، روابط(۷) و (۸) به صورت زیر درمی‌آیند:

$$x = \frac{A + C}{2}$$

$$y = \frac{A - C}{2}$$

ودرنتیجه روابط (۱) چنین می‌شوند:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{۲}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{۲}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^{۲}-B}}{۲}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^{۲}-B}}{۲}} \qquad (۹)$$

موارد استعمال :

I - معادلهٔ $x^{۴}-۱۶x^{۲}+۴=۰$ را حل کنید .

حل :

$$x^{۲}=y$$
$$x^{۴}=y^{۲}$$

معادلهٔ حلال : $y^{۲}-۱۶y+۴=۰$

$$y=۸\pm\sqrt{۶۴-۴}$$

$$\begin{cases} y'=۸+\sqrt{۶۰} \\ y''=۸-\sqrt{۶۰} \end{cases}$$

در نتیجه :
$$\begin{cases} x'=\pm\sqrt{۸+\sqrt{۶۰}} \\ x''=\pm\sqrt{۸-\sqrt{۶۰}} \end{cases}$$

بطوری که ملاحظه می‌شود، جوابها به‌صورت رادیکال مرکب می‌باشند که درصورت امکان ، باید آنها را به صورت رادیکالهای ساده بنویسیم؛ ابتدا ملاحظه می‌کنیم که :

$$A^{۲}-B=C^{۲}$$
$$C^{۲}=۶۴-۶۰=۴$$

چون دراین مسئله A مثبت وعدد $(A^{۲}-B)$ یعنی ۴ مجذور کامل است، تبدیل رادیکالهای مرکب نامبرده به رادیکالهای ساده میسر است و با استفاده از روابط (۹) ، چنین خواهیم داشت:

$$x'=\pm\sqrt{۸+\sqrt{۶۰}}=\pm\left(\sqrt{\frac{۸+۲}{۲}}+\sqrt{\frac{۸-۲}{۲}}\right)=\pm\left(\sqrt{۵}+\sqrt{۳}\right)$$

$$x''=\pm\sqrt{۸-\sqrt{۶۰}}=\pm\left(\sqrt{\frac{۸+۲}{۲}}-\sqrt{\frac{۸-۲}{۲}}\right)=\pm\left(\sqrt{۵}-\sqrt{۳}\right)$$

II ـ به فرض آنکه x عددی مثبت باشد، رادیکال مرکب زیر را به رادیکالهای ساده تبدیل کنید :

$$y=\sqrt{x^{۲}+x+۱+\sqrt{۲x^{۳}+x^{۲}+۲x}}$$

$$A=x^{۲}+x+۱ \text{ ، } B=۲x^{۳}+x^{۲}+۲x$$

$$C^{۲}=A^{۲}-B=(x^{۲}+x+۱)^{۲}-(۲x^{۳}+x^{۲}+۲x)$$

$$C^{۲}=x^{۴}+۲x^{۲}+۱=(x^{۲}+۱)^{۲}$$

$$y=\sqrt{\frac{x^{۲}+x+۱+x^{۲}+۱}{۲}}+\sqrt{\frac{x^{۲}+x+۱-x^{۲}-۱}{۲}}$$

$$y=\sqrt{\frac{۲x^{۲}+x+۲}{۲}}+\sqrt{\frac{x}{۲}}$$

تمرین

رادیکالهای مرکب زیر را به ساده‌ترین صورت تبدیل کنید :

۱- $\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$ ۲- $\sqrt{۷+۴\sqrt{۳}}$

۳- $\sqrt{۵-\sqrt{۲۴}}$ ۴- $\sqrt{۸+۴\sqrt{۳}}$

۵- $\frac{۱}{۴}\sqrt{۶+۲\sqrt{۵}}$ ۶- $\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}$

۷- $\sqrt{۲۸+۵\sqrt{۱۲}}$ ۸- $\sqrt{a^{۲}+b+۲a\sqrt{b}}$

۹- $\sqrt{a^2c+bd^2+2ad\sqrt{cb}}$

۱۰- $\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}$

۱۱- $\sqrt{\frac{3a}{b}+\sqrt{\frac{12a^2c^2}{bd^2}-\frac{4a^3c^3}{d^4}}}$

۱۲- $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$

۱۳- $\sqrt{b^2-ab+\frac{a^2}{4}+\sqrt{4ab^3-8a^2b^2+a^3b}}$

پایان